Felder und Wellen Übung 6 — 12.12.2011

Einleitung: Laplace-Gleichung und Separationsansatz

Wdh: $\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\varepsilon\vec{E} = \rho$ $\qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$

$$\boxed{\Delta\Phi = -\rho/\varepsilon}$$

$$\boxed{\Delta\Phi = 0} \text{ im ladungsfreien Raum}$$

Eindeutigkeitssatz: wenn Φ auf Randfläche gegeben und eine Lösung bekannt ist, die $\Delta\Phi = 0$ löst, dann ist die gefundene Lösung die einzige Lösung.

Lösungsmethoden:
- Vereinfachung durch Symmetrie
  → eindimensionale Integration (vgl. Ü5)
- numerisch
- Separationsansatz
- andere analytische Verfahren

Separationsansatz

- kann erfolgreich sein, wenn Randbedingungen auf Flächen gegeben ist, bei denen eine Koordinate konstant ist.
  → aus Randflächen ergibt sich die Wahl des Koordinatensystems

Kartesische Koordinaten: $\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$

Ansatz: $\Phi(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial z^2} \quad \Big| :X(x) \; :Y(y) \; :Z(z)$$

Separation der Variablen

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)}\cdot\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{\text{nur von } x \text{ abh.}} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}_{\text{nur von } y \text{ abh.}} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}_{\text{nur von } z \text{ abh.}} = 0$$

$$-\alpha^2 \quad + \quad -\beta^2 \quad + \quad \gamma^2 \quad = 0$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 \rightarrow \{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\} \qquad \alpha \neq 0$$

Y genauso

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = +\gamma^2 \rightarrow \{e^{\gamma z}, e^{-\gamma z}\} \qquad \gamma \neq 0$$

- Vorzeichen von $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ ist beliebig, aber geschickte Wahl kann Rechnung vereinfachen.
- $\alpha = 0 \rightarrow X(x) = Ax + B$ (vgl. Lösung 5)
- Die allg. Lösung der Laplace-Gleichung entsteht durch Überlagerung aller partikulären Einzellösungen $\Phi_{allg} = \sum_i C_i \Phi_i$
- Die Koeffizienten werden durch die Randbedingungen bestimmt. (evtl. Reihenansatz, vgl. A16, A18)

$\boxed{A16}$ $\Delta\Phi = 0$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}_{=0} = 0$$

Randbedingungen:

$\Phi = 0$ für $y = 0$, $y = a$

$\Phi = V_0$ für $x = 0$

$\Phi \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

$$\Phi = X(x)\cdot Y(y) \qquad \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$Y(y)\cdot\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \qquad | : X(x), : Y(y)$$

Separation der Variablen

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)}\cdot\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{\text{nur abh. von } x} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}_{\text{nur abh. von } y} = 0$$

$$f(x) \qquad + \qquad g(y) \qquad = 0$$

$\rightarrow f(x), g(y)$ müssen konst sein $\rightarrow f(x) = C_1$

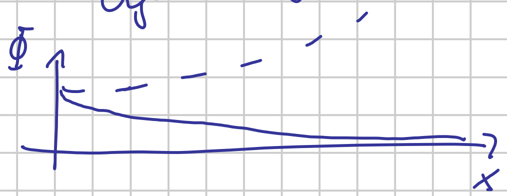
$g(x) = C_2$

$C_1 + C_2 = 0$

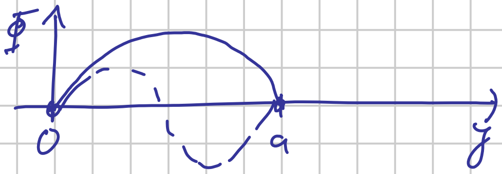
$\rightarrow C_1, C_2$ haben versch. Vorzeichen, $C_1 = k^2$, $C_2 = -k^2$

(1) $\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = X(x)\cdot k^2 \to \underline{X = Ae^{kx} + Be^{-kx}}$

(2) $\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = Y(y)\cdot(-k^2) \to Y = C\sin(ky) + D\cos(ky)$



Möglicher Potentialverlauf



$$\Phi(x,y) = X(x)\cdot Y(y) = (\underbrace{A}_{=0,\ \text{sonst nicht } \Phi\to 0 \text{ für } x\to\infty}e^{kx} + Be^{-kx})(C\sin(ky) + D\cos(ky))$$

$$= Be^{-kx}(C\sin(ky) + D\cos(ky)) \qquad C_{neu} = BC,\ D_{neu} = BD$$

$$= e^{-kx}(C\sin(ky) + D\cos(ky))$$

$$\underbrace{\Phi(x,y=0)}_{=0} = e^{-kx}(C\sin(0) + D\cos(0)) = e^{-kx}D \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall x$$

$$\to \boxed{D = 0}$$

$\Rightarrow \Phi(x,y) = Ce^{-kx}\sin(ky)$ $\qquad \underbrace{\Phi(x,y=a)}_{=0} = Ce^{-kx}\sin(ka) \stackrel{!}{=} 0$ $\to C = 0$ ↯ zu RB $x=0$; $\to \sin(ka) = 0$

$\sin(ka) = 0 \qquad ka = n\cdot\pi \quad (n = 1, 2, 3, 4 \dots)$

$k = \frac{n\pi}{a}$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = Ce^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \qquad n = 1, 2, 3 \dots$$

letzte Randbedingung: $\Phi(x=0,\ 0<y<a) = V_0$

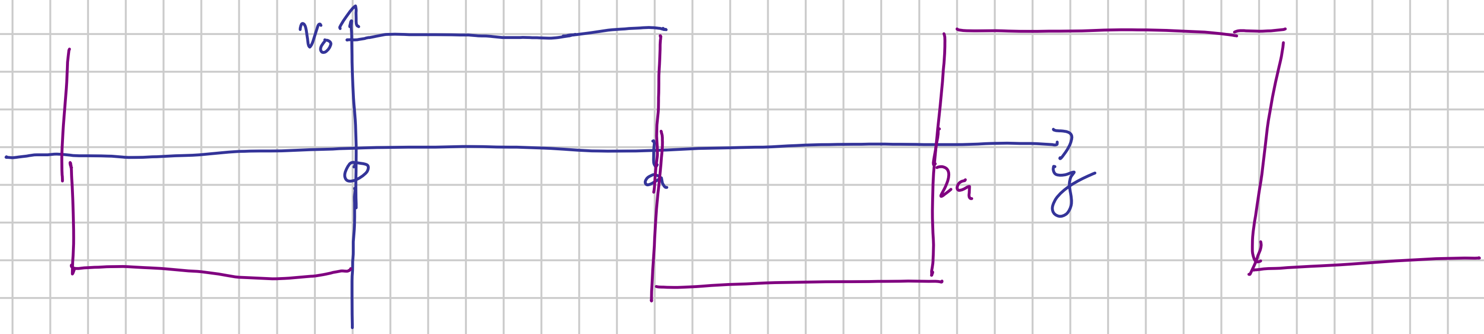
$\Phi(0,y) = C\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \stackrel{!}{=} V_0 \qquad 0<y<a$, sin ist nicht konst.
$\to$ so nicht lösbar

Wegen der Linearität der Laplace-Glg. gilt:
Wenn $\Phi_1(x,y)$ und $\Phi_2(x,y)$ Lösungen sind, ist auch $\Phi_1(x,y) + \Phi_2(x,y)$ eine Lsg. der Laplace-Glg.

$$\rightarrow \Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$\Phi(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \overset{!}{=} V_0$$ $\Rightarrow$ Koeffizienten C_n so wählen, dass Bedingung erfüllt ist.

Wegen $\sum .. \sin(..)$ können nur ungerade Funktionen dargestellt werden.



$\rightarrow$ Fourierreihe für Rechteckfunktion benötigt

$\rightarrow$ math. FS: Fourierreihe für Rechteckfunktion mit Periode 2a und Amplitude von b

$$R(x) = \frac{4b}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{a}x\right)}{(2k+1)}$$

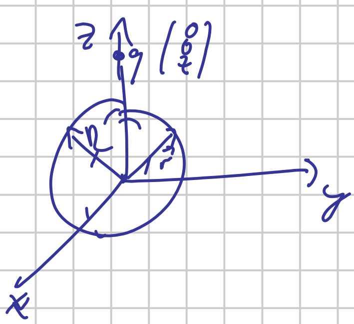
$$S(y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{a}y\right)}{2k+1} \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$\Rightarrow C_n = 0$ für n gerade $(n = 2m, m \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow C_n = \frac{4V_0}{\pi \cdot n}$ für n ungerade $(n = 2m+1, m \in \mathbb{N})$

$$\boxed{\Rightarrow \Phi(x,y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi n} e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}$$

$\boxed{A15}$ ges: durchschnittliches Potential auf Kugel Φ_D



$$\angle \frac{\sum \text{Potential} \cdot \text{Fläche des Potentials}}{\text{Ges. Fläche}} \to \int$$

Kugel: $4\pi R^2$

Potential am Ort $\vec{r}$ einer Punktladung

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left| \vec{r} - \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} \right|} \qquad \Phi(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left| \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} \right|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_D = \frac{1}{4\pi R^2} \iint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\underbrace{R^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + R^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}_{R^2\sin^2\vartheta\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}} + (R\cos\vartheta - z)^2}} \cdot df$$

$$\Phi_D = \frac{q}{(4\pi)^2 R^2 \varepsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2\sin^2\vartheta + (R\cos\vartheta - z)^2}} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \frac{q\,\cancel{R^2}}{(4\pi)^2 \cancel{R^2} \varepsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\underbrace{R^2\sin^2\vartheta + R^2\cos^2\vartheta}_{R^2\underbrace{(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)}_{=1}} - 2Rz\cos\vartheta + z^2}} \, d\vartheta$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{R^2 - 2Rz\cos\vartheta + z^2}} \, d\vartheta$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\vartheta} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\vartheta}} \cdot (+\sin\vartheta) \cdot (+\cancel{2}Rz)$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{Rz} \sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\vartheta} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 Rz} \left(\sqrt{R^2+z^2+2Rz} - \sqrt{R^2+z^2-2Rz} \right) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 Rz} \left(\sqrt{(z+R)^2} - \sqrt{(z-R)^2} \right)$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 Rz} \left(z+R - (z-R) \right) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 Rz} 2R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z} = \Phi_D = \Phi(0)$$

Es gilt allg: Im ladungsfreien Raum ($\rho = 0$, $\Delta\Phi = 0$) ist das Potential eines Punktes gleich dem Mittelwert des Potentials seiner Nachbarpunkte.