Felder und Wellen Übung 9 (16.01.2012)

Magnetostatik

allg: $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \cancel{\dot{\vec{D}}}=0$

$$\oint \vec{H}\,d\vec{s} = \iint \vec{j}\,d\vec{f}$$

Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Materie: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

bewegte Ladungen (e^- im Material) sind Ströme ⇒ erzeugen magn. Moment

Lineare Medien: $\boxed{\vec{B} = \mu_0 (H + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \underbrace{\chi_m \cdot \vec{H}}_{\vec{M}}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}}$

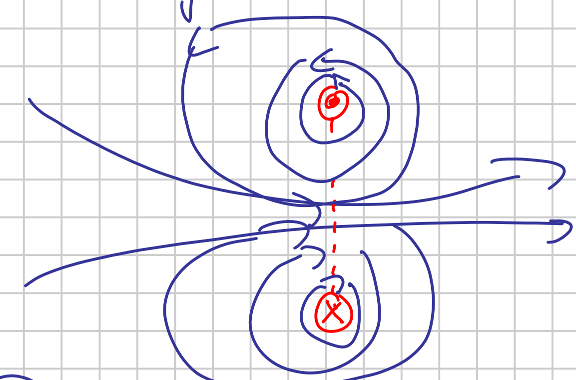
$\mu_r \in [0{,}999 \ldots > 1000]$

Bedingungen an Grenzflächen

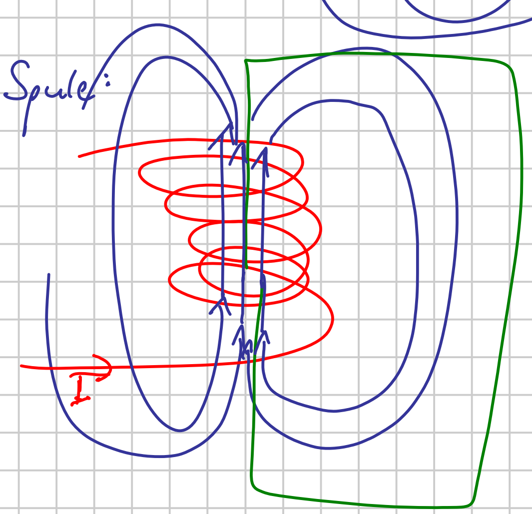
$B_{n1} = B_{n2}$ $\quad H_{t1} = H_{t2}$ (wenn keine Flächenströme)

Magnetfeld einer Spule

zuerst: Magnetfeld einer Schleife



Spule:



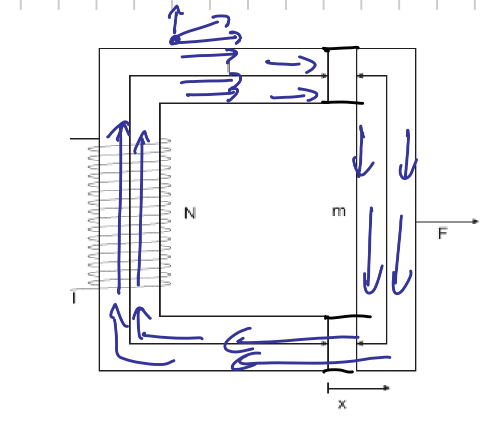
Integrationsweg

$$\oint \vec{H}\,d\vec{s} = \underbrace{\iint \vec{j}\,d\vec{f}}_{N \cdot I}$$

Problem: $\vec{H}$ nicht kreisförmig

Integrationsweg?

Materie verändert die Form von $\vec{H}$: $B_{n1} = B_{n2}$ $\quad \cancel{\mu_0}\mu_1 H_{n1} = \cancel{\mu_0}\mu_2 H_{n2}$

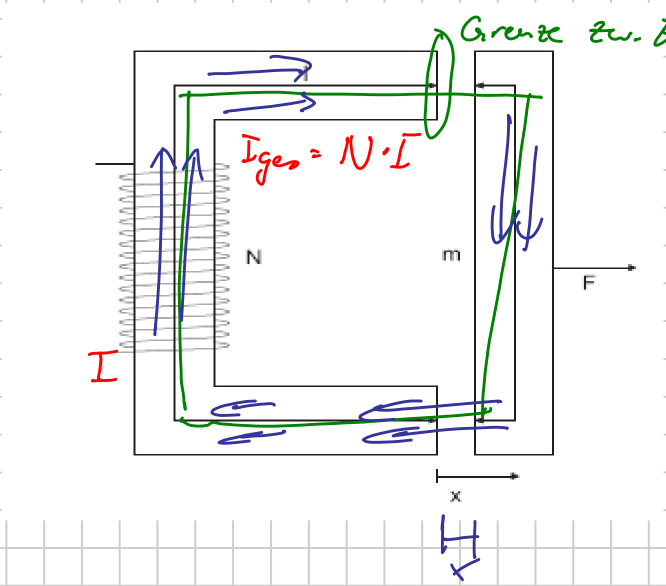


$$H_{n,eisen} = \frac{1}{\underbrace{\mu_{r,eisen}}} \cdot H_{n,Luft}$$
$$\approx \frac{1}{1000}$$

→ Richtung von $\vec{H}$ im Joch entlang des Jochs

→ Integrationsweg hier wählen!

$\boxed{A22}$ a) ges.: $\vec{B}, \vec{H}$



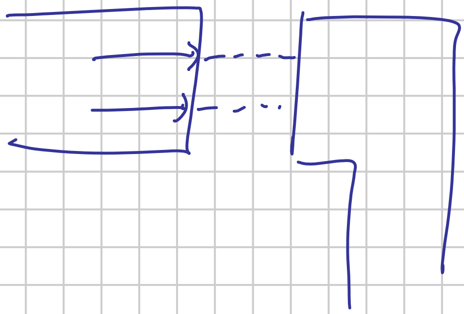
$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{J} d\vec{A} = NI$$

$\vec{H} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{H} d\vec{s} = H \cdot ds$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H_{eisen} \cdot l + 2x \cdot H_{Luft}$$
$$= NI$$

Wie ist das Verhältnis zwischen H_{Luft} und H_{eisen}?

An der Grenze gilt: $H_{t1} = H_{t2}$ → Richtung ändert sich nicht



$B_{n1} = B_{n2}$

$$\cancel{\mu_0} \underbrace{\mu_{r,eisen}}_{\mu_r} H_{n,Eisen} = \cancel{\mu_0} \underbrace{\mu_{r,Luft}}_{=1} H_{n,Luft}$$

$\Rightarrow H_{n,Luft} = \mu_r H_{n,eisen}$

$H_{eisen} \cdot l + 2x\mu_r H_{eisen} = NI \Rightarrow H_{eisen} = \frac{NI}{l + 2x\mu_r}, \quad H_{Luft} = \frac{\mu_r NI}{l + 2x\mu_r}$

$B_{eisen} = \mu_0 \mu_r H_{eisen} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2x\mu_r}, \quad B_{Luft} = \mu_0 H_{Luft} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2x\mu_r} = B_{eisen}$

b) ges: magn. Energie W_m 1.) $W_m(I,x)$, 2.) $W_m(\Phi, x)$

magn. Fluss

$$W_m = \underbrace{\iiint w_m \, dv}_{\text{„Energiedichte · Volumen"}} = w_{m,eisen} \cdot V_{eisen} + w_{m,Luft} \cdot V_{Luft}$$

$w_{m,eisen} = \frac{1}{2} B H_{eisen}$, $V_{eisen} = l \cdot A$

Querschnittsfläche

$w_{m,Luft} = \frac{1}{2} B H_{Luft}$, $V_{Luft} = 2x \cdot A$

$$W_m = \frac{1}{2} B A \left(H_{eisen} \cdot l \cancel{A} + H_{Luft} \cdot 2x \cancel{A} \right)$$

$$= \frac{1}{2} A \underbrace{\mu_0 \mu_r \frac{NI}{l + 2\mu_r x}}_{B} \left(l \frac{NI}{l + 2\mu_r x} + 2x \frac{\mu_r NI}{l + 2\mu_r x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \left(\frac{NI}{l + 2\mu_r x} \right)^2 (l + 2x\mu_r) = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{(NI)^2}{l + 2\mu_r x} \quad (*)$$

$$= W_m(I, x)$$

Bei konstanten Strom I nimmt die im Feld ab, wenn x steigt.

$W_m(\Phi, x) = ?$ $\quad \Phi = \iint \vec{B} \, d\vec{f} = B \cdot A = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2\mu_r x} \cdot A$

$$\Rightarrow I = \Phi \frac{l + 2\mu_r x}{\mu_0 \mu_r N A}$$

I einsetzen in (*)

$$W_m = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{\left(\cancel{N} \cdot \Phi \frac{l + 2\mu_r x}{\mu_0 \mu_r \cancel{N} A} \right)^2}{l + 2\mu_r x} = \frac{1}{2 A \mu_0 \mu_r} (l + 2\mu_r x) \Phi^2$$

Bei konstanten Fluss nimmt die magnetische Feldenergie zu, wenn x steigt!

c) ges: Kraft auf Last

Laut Aufgabe

bei konst. Strom I

$$F = \frac{\partial W_m(I,x)}{\partial x} = -\frac{1}{2} A\mu_0\mu_r (NI)^2 \cdot \frac{2\mu_r}{(l+2\mu_r x)^2}$$

$$= -A\mu_0\mu_r^2 (NI)^2 \cdot \frac{1}{(l+2\mu_r x)^2}$$

bei konst. Fluss Φ_m

$$F = -\frac{\partial W_m(\Phi,x)}{\partial x}$$

$$= -A\mu_0\mu_r^2 (NI)^2 \frac{1}{(l+2\mu_r x)^2}$$

identisch

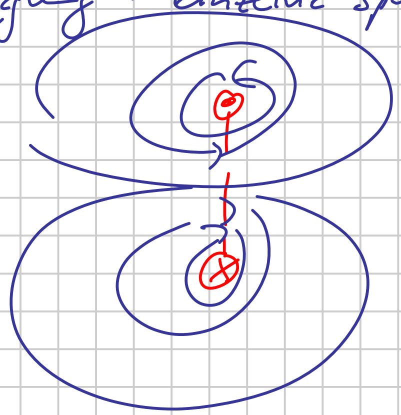
Grund: Kraft ist nur abh. vom aktuellen Strom I bzw. zugehörigen Φ nicht davon, ob sich nach kleiner Änderung von x der Fluss oder Strom ändern würde!

Richtung der Kraft: entlang negativer x-Achse $\rightarrow$ Last wird angezogen!

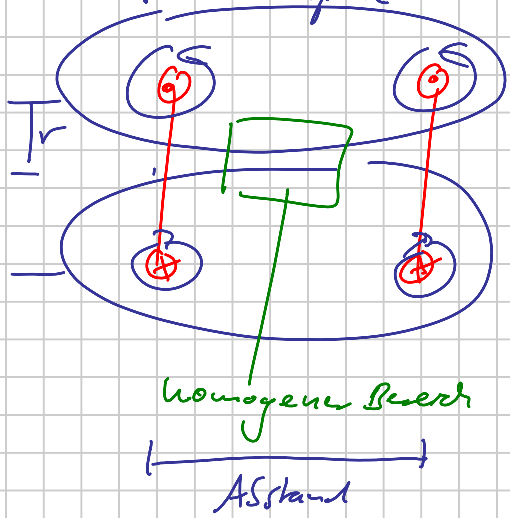
Bei konst Fluss: mech. Energie $\leftrightarrow$ magnetische Energie

Bei konst. Strom: zusätzlich Energieaustausch mit Quelle

$\boxed{\text{A23}}$ Vorüberlegung: einzelne Spule „von oben"



Helmholtzspule



Frage: wie groß sollte der Abstand und Radius für ein möglichst homogenes Feld sein?

a) Berechnung von $\vec{B}$ auf z-Achse einer einzelnen Spule, $z = d$

→ Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dv'$

Im Prinzip möglich, einfacher:

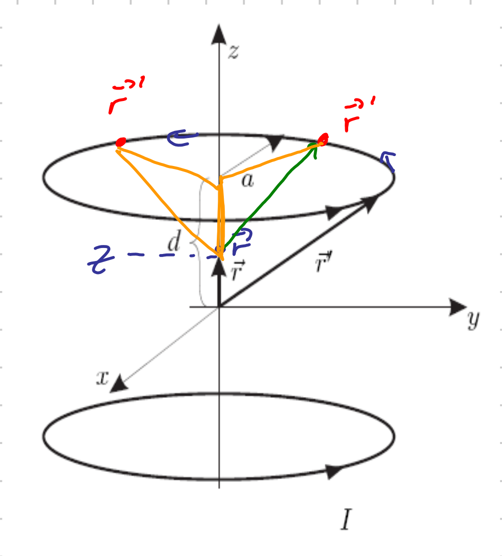
Biot-Savart für Linienleiter:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} I \int \frac{d\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Ort, wo $\vec{B}$ gesucht ist

$\vec{r} = z\cdot\vec{e}_z$

alle benötigten Größen bekannt



$\vec{r}\,'$: Ort, wo Strom fließt

$\vec{r}\,' = d\vec{e}_z + a\vec{e}_R + \varphi'\vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow \vec{r}-\vec{r}\,' = (z-d)\vec{e}_z - a\vec{e}_R - \varphi'\vec{e}_\varphi$

$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(z-d)^2+a^2}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a\,d\varphi'\vec{e}_\varphi \times \left((z-d)\vec{e}_z - a\vec{e}_R - \varphi'\vec{e}_\varphi\right)}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$d\vec{s} = a\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

FS: $d\vec{s} = \cancel{\vec{e}_R\, dR} + \vec{e}_\varphi\cdot \underbrace{R}_{=a}\, d\varphi + \cancel{\vec{e}_z\, dz}$

$\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z = \vec{e}_R$

$\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_R = -\vec{e}_z$

$\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_\varphi = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a\cdot d\varphi'\left(\vec{e}_R(z-d) + a\,\vec{e}_z\right)}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$\int \dots \vec{e}_R = 0$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} a^2 \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{\vec{e}_z}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}}\, d\varphi'$$

$$= \cancel{2\pi}\cdot\frac{\mu I}{\cancel{4\pi}\,2} a^2 \frac{\vec{e}_z}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}} = \vec{B}_{z1}(z)$$

b) Feld des Spulenpaars: $\vec{B}_z(z) = \vec{B}_{z1}(z) + \vec{B}_{z2}(z)$

Spule oben — Spule unten

$$B(z) = \frac{1}{2}\mu \frac{Ia^2}{((z-d)^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{2}\mu \frac{Ia^2}{((z+d)^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\mu I a^2 \cdot \left(\frac{1}{((z-d)^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{((z+d)^2+a^2)^{3/2}}\right)$$

Für homogenes Feld: $\frac{\partial B(z=0)}{\partial z} \overset{!}{=} 0$