Felder und Wellen Übung 10 — 23.01.2012

Induktion

Wir kennen das Durchflutungsgesetz $\oint H d\vec{s} = \iint \vec{J} d\vec{f}$
(wenn $\dot{\vec{D}} = 0$)

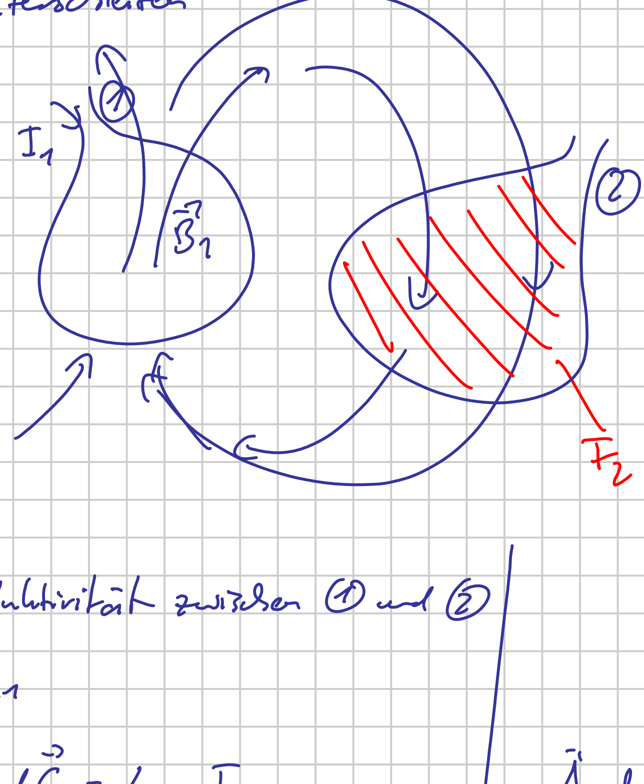
„Stromdichte $\vec{J}$ erzeugt magn. Wirbelfeld"

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ → zeitliche Änderung der magn. Flussdichte führt zu elektrischem Wirbelfeld!

$$\underset{\text{induzierte Spannung}}{U_{ind}} = \oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\iint \vec{B} d\vec{f}}_{\Phi_m} = \underset{\text{zeitliche Änderung des magn. Flusses}}{-\frac{d}{dt}\Phi_m}$$

führt zu

Bsp: 2 Leiterschleifen:



Die vom Strom in Schleife ① verursachte Flussdichte $\vec{B}_1$ führt zu einem Fluss Φ_{m12} in Schleife 2:

$$\Phi_{m12} = \iint_{F_2} \vec{B}_1 d\vec{f}$$

$$\sim I_1$$

$$= L_{12} \cdot I_1$$

$$U_{ind} = -\dot{\Phi}_{m12}$$

L_{12}: Gegeninduktivität zwischen ① und ②

$L_{12} = L_{21}$

$$\Phi_{m11} = \iint_{F_1} \vec{B}_1 d\vec{F} = L_{11} I_1$$

L_{11}, L_{22}: Selbstinduktivitäten der Schleifen

Änderung verursacht durch
- Ändern des Stroms I_1
- Änderung der Fläche F_2 (Drehen, Schieben, Biegen ...)

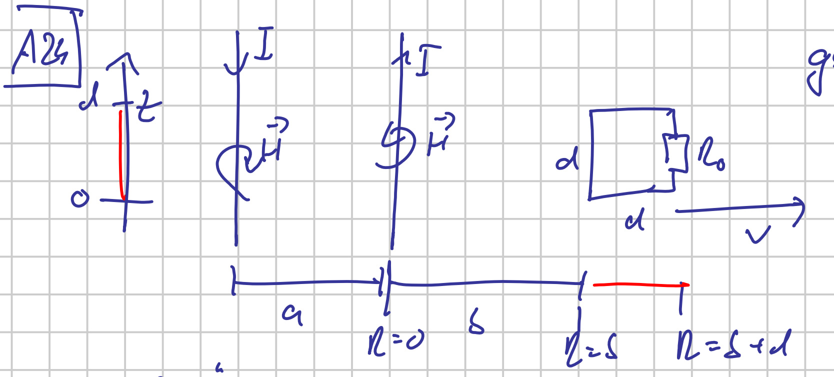
Zusammenhang zwischen Induktivitäten und Feldenergie:

$$W_m = \iiint w_m \, dv, \quad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$$

1 Leiter: $W_m = \frac{1}{2} L I^2$ N Leiter: $W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{ik}\cdot I_i \cdot I_k$

vgl. Kondensator: $W_{el} = \frac{1}{2} C U^2$

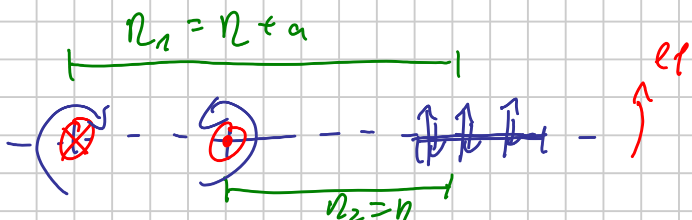
A24



gesucht: Φ durch Leiterschleife

$b = vt$ (Aufg. c)

„von oben"



$\vec{H}$ ⊥ Leiterschleife

$\vec{B}$ ⊥ "

a) $\Phi_m = \iint \vec{B}\, d\vec{f} = \mu \iint \vec{H}\, d\vec{f} = \mu \iint (\vec{H}_1 + \vec{H}_2)\, d\vec{f}$

→ Berechne $\vec{H}_1, \vec{H}_2$:

$$\oint \vec{H}_1 d\vec{s} = \iint \vec{J} d\vec{f} \Rightarrow 2\pi R_1 \cdot H_1 = -I \Rightarrow H_1 = \frac{-I}{2\pi R_1}$$

$$\oint H_2 d\vec{s} = \iint \vec{J} d\vec{f} \Rightarrow 2\pi R_2 \cdot H_2 = I \Rightarrow H_2 = \frac{I}{2\pi R_2}$$

Wähle $R_2 = R$, $R_1 = R + a$ (rechts von Leiter 2)

$$\Rightarrow H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi}\left(-\frac{1}{R+a} + \frac{1}{R}\right)$$

$$\underline{\Phi_m} = \mu \int_{R=b}^{b+d}\int_{z=0}^{d} \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right) \cancel{\vec{e}_\varphi} \cdot \cancel{\vec{e}_\varphi}\, dz\, dR$$ (Zyl. koord. um Leiter 2)

$$= \mu \cdot d \cdot \frac{I}{2\pi}\left[\underbrace{\ln R - \ln(R+a)}_{\ln\left(\frac{R}{R+a}\right)}\right]_b^{b+d} = \underline{\mu d \frac{I}{2\pi}\left(\ln\frac{b+d}{b+d+a} - \ln\frac{b}{b+a}\right)}$$

b) $I = I_0 \sin \omega t$ (in den Drähten)

ges: $I_S(t)$ in Schleife

Woher kommt dieser Strom?

$$\dot{I}_{\text{Drähte}} \rightarrow \dot{\vec{B}} \text{ im Raum} \rightarrow \dot{\Phi}_{\text{Schleife}} \rightarrow U_{ind} \rightarrow I_{ind} = \frac{U_{ind}}{R_0}$$

Φ_{Schleife} wurde in a) berechnet

$$I_{ind}(t) = \frac{U_{ind}(t)}{R_0} = \frac{-\dot{\Phi}(t)}{R_0}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{d}{dt}\Phi_m = \mu d \frac{\dot{I}(t)}{2\pi}\left(\ln(\ldots) - \ln(\ldots)\right)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt}\left(I_0 \sin \omega t\right) = I_0 \omega \cdot \cos \omega t$$

$$\Rightarrow I_{ind}(t) = -\frac{1}{R_0} \cdot I_0 \omega \cos \omega t \cdot \frac{\mu d}{2\pi}\left(\ln(\ldots) - \ln(\ldots)\right)$$

(Wechselstrom)

identisch

c) Leiterschleife bewegt sich: $b = v \cdot t$

Es gilt wieder: $I_{ind}(t) = \dfrac{-\dot{\Phi}(t)}{R_0}$

$$\dot{\Phi} = \mu d \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\left(I(t) \cdot \left(\ln(vt+d) - \ln(vt+d+a) - \ln(vt) + \ln(vt+a)\right)\right)$$

Produktregel

$$= \mu d \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\dot{I}(t) \cdot \left(\ln(\ldots) - \ln(\ldots) - \ldots + \ldots\right)\right.$$

Anteil wegen zeitlich änderlichem Strom in den Drähten

$$\left. + I(t) \cdot v \left(\frac{1}{vt+d} \cdot \cancel{v} - \frac{1}{vt+d+a} \cdot \cancel{v} - \frac{1}{vt} \cdot \cancel{v} + \frac{1}{vt+a} \cdot \cancel{v}\right)\right)$$

Innere Abl.

Anteil $\sim v \rightarrow$
Anteil wegen Bewegung

$\boxed{\text{A25}}$ ges: Selbstinduktionskoeff. pro Längeneinheit
(typische Größe einer Leitung)

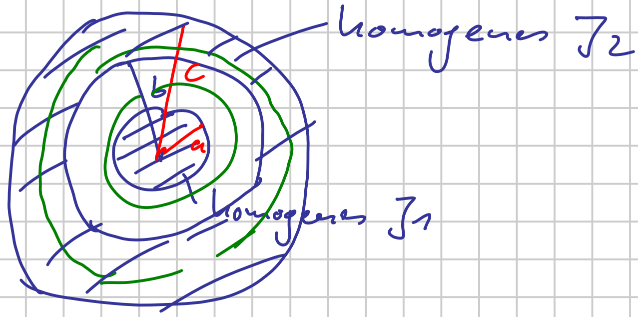
$W_m = \frac{1}{2} L I^2$ wäre im ges. Raum unendlich groß

$$\frac{W_m}{\ell} = \frac{1}{2}\frac{L}{\ell} I^2 \qquad \Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{W_m}{\ell} \cdot \frac{2}{I^2}$$

gesucht!

$\rightarrow$ Berechne $\frac{W_m}{l} = \frac{1}{l}\iiint w_m \, dv \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} = \frac{1}{2}\mu H^2$

$\vec{H} = ?$



weil homogen verteilt:

$J_1 \cdot \pi a^2 = I \Rightarrow \vec{J}_1 = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e_z}$

$J_2 \cdot (\pi c^2 - \pi b^2) = -I \Rightarrow \vec{J}_2 = \frac{-I}{\pi(c^2-b^2)}\vec{e_z}$

$\underbrace{\oint \vec{H} ds = \iint \vec{J} d\vec{A}}_{\text{ges. eingeschlossener Strom}}$

$\Rightarrow$ Für $R < a$: $2\pi R \cdot H = J_1 \pi R^2 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi R^2$

$\Rightarrow H = \frac{I}{2\pi a^2} R \qquad (1)$

Für $a < R < b$: $2\pi R \cdot H = J_1 \cdot \pi a^2 = I$

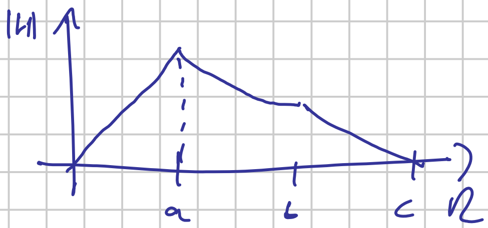
$H = \frac{I}{2\pi R} \qquad (2)$

Für $b < R < c$: $2\pi R \cdot H = I + J_2(\pi R^2 - \pi b^2)$

$= I - \frac{I}{\cancel{\pi}(c^2-b^2)}\cancel{\pi}(R^2-b^2)$

$\Rightarrow H = I\left(1 - \frac{R^2-b^2}{c^2-b^2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi R}$

(3)



Für $R > c$: $2\pi R \cdot H = I + (-I) = 0$

$\Rightarrow H = 0 \qquad (4)$

$\frac{W_m}{l} = \frac{1}{l}\iiint w_m \, dv = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\int_0^{\infty} \frac{1}{2}\mu H(R)^2 \cdot \underbrace{R \cdot dR\, dz\, d\varphi}_{= dv, \text{ s. FS}}$

$= \frac{1}{\cancel{l}}\frac{1}{\cancel{2}}\mu \cancel{2}\pi \cancel{l}\int_0^{\infty} H(R)^2 \cdot R\, dR$

$= \mu \cdot \pi \left(\int_0^a H(R)^2 R\, dR + \int_a^b H(R)^2 R\, dR + \int_b^c H(R)^2 R\, dR + \underbrace{\int_c^{\infty} H(R)^2 R\, dR}_{=0, \text{ da } H=0}\right)$

$$\int_0^a \left(\frac{IR}{2\pi a^2}\right)^2 R\,dR \overset{(1)}{=} \frac{I^2}{(2\pi a^2)^2}\left[\frac{1}{4}R^4\right]_0^a = \frac{I^2 \cancel{a^4}}{16\pi^2 \cancel{a^4}} = \frac{I^2}{16\pi^2}$$

$$\int_a^b \left(\frac{I}{2\pi R}\right)^2 \cdot R\,dR \overset{(2)}{=} \frac{I^2}{4\pi^2}\left[\ln R\right]_a^b = \frac{I^2}{4\pi^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\int_b^c I^2 \underbrace{\left(1-\frac{R^2-b^2}{c^2-b^2}\right)^2}\frac{1}{(2\pi R)^2}\cdot R\,dR \overset{(3)}{=} \frac{I^2}{4\pi^2 (c^2-b^2)^2}\int \frac{(c^2-R^2)^2}{R^2}\cdot R\,dR$$

$$\frac{c^2 \cancel{-b^2} - R^2 \cancel{+b^2}}{c^2-b^2} = \frac{c^2-R^2}{c^2-b^2}$$

$$= \frac{I^2}{4\pi^2(c^2-b^2)^2}\underbrace{\int_b^c \frac{(c^4-2c^2R^2+R^4)}{R}\,dR}$$

$$= \int_b^c \left(\frac{c^4}{R} - 2c^2R + R^3\right)dR = c^4\ln\left(\frac{c}{b}\right) - c^2(c^2-b^2) + \frac{1}{4}(c^4-b^4)$$

$$= \frac{I^2}{4\pi^2}\underbrace{\frac{1}{(c^2-b^2)^2}\left(c^4\ln\left(\frac{c}{b}\right) - c^2(c^2-b^2) + \frac{1}{4}(c^4-b^4)\right)}_{=:A} = \frac{I^2}{4\pi^2}\cdot A$$

$$\frac{W_m}{l} = \mu\cancel{\pi} I^2\left(\frac{1}{16\pi\cancel{^2}} + \frac{\ln b/a}{4\pi\cancel{^2}} + \frac{A}{4\pi\cancel{^2}}\right) = \frac{\mu I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a} + A\right)$$

$$\boxed{\frac{L}{l} = \frac{W_m}{l}\cdot\frac{2}{I^2} = \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a} + A\right)}$$