Felder und Wellen Übung 12 31.01.12

Einleitung: Wellen in leitfähigen Medien

letzte Übung: Wellen in Medien mit $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

dann: $\operatorname{rot} \vec{H} = \underbrace{\vec{j}}_{=0} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$

Ansatz für harmonische Wellen

$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$ löst die Wellengleichung

mit $k = \frac{\omega}{c}$, $c^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$ (k reell)

Jetzt: $\kappa > 0$ (Leitfähigkeit vorhanden)

$\Rightarrow$ $\vec{E}$-Feld der Welle erzeugt Stromdichte $\vec{j}$ zusätzlicher Term

dann $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \kappa\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

„Telegraphengl."

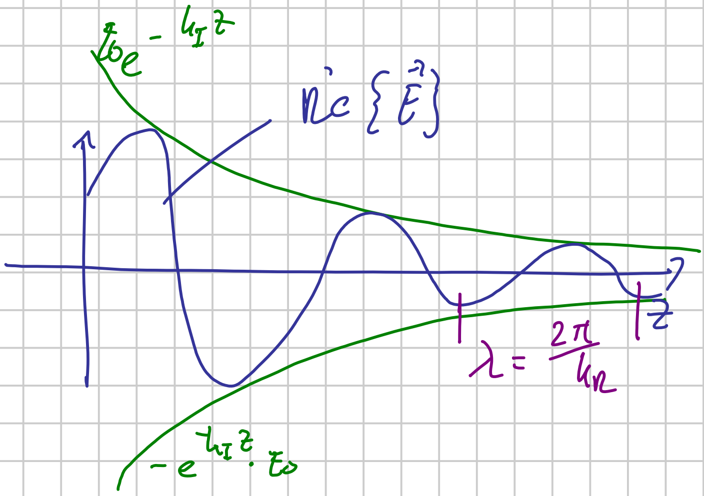
Gleicher Ansatz für harmonische Welle

$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$ löst auch die Telegraphengl.

aber mit $\underline{k} = \omega \sqrt{\varepsilon\mu\left(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon\omega}\right)}$ (komplex!)

$= \underline{k_R - j k_I}$

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - (k_R - jk_I)z)} \vec{e}_y = E_0 \underbrace{e^{j(\omega t - k_R z)}}_{\text{schwingender Anteil}} \cdot \underbrace{e^{-k_I z}}_{\text{dämpfender Anteil}} \vec{e}_y$$



A23 geg: $\vec{H} = A \cdot e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \sin\vartheta \, \vec{e_\varphi}$

a) ges: $\vec{E}$ aus $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Ansatz: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \underbrace{\vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}}_{\vec{E}(\vec{r}, t)} \cdot j\omega$

$\vec{r}$: r, ϑ, φ

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j\omega \cdot \varepsilon \vec{E}(r, t)$

„linke Seite":

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{e_r} \frac{1}{r \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(H_\varphi \cdot \sin\vartheta) - \cancel{\frac{\partial H_\vartheta}{\partial \varphi}} \right]$$

FS

$$+ \vec{e_\vartheta} \cdot \frac{1}{r} \left[\cancel{\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}} - \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot H_\varphi) \right]$$

$$+ \vec{e_\varphi} \cdot \frac{1}{r} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot H_\vartheta)} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \vartheta} H_r} \right]$$

$\vec{H}$ hat nur eine φ-Komponente

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}(H_\varphi \cdot \sin\vartheta) = A \cdot e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) 2 \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{r} = \ldots = -A \sin\vartheta \, e^{j(\omega t - kr)} \left(k^2 - \frac{jk}{r} - \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{e_r} \cdot \frac{1}{r \cancel{\sin\vartheta}} A \cdot e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) 2 \cancel{\sin\vartheta} \cos\vartheta$$

$$+ \vec{e_\vartheta} \cdot \frac{1}{r} A \cdot \sin\vartheta \, e^{j(\omega t - kr)} \left(k^2 - \frac{jk}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \qquad = j\omega\varepsilon \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E} = \frac{A}{\omega\varepsilon} \underbrace{e^{j(\omega t - kr)}}_{\text{harmonische Zeitabhängigkeit}} \underbrace{\left(\vec{e_r} \left(\frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3}\right) 2 \cos\vartheta + \vec{e_\vartheta} \left(\frac{jk^2}{r} + \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3}\right) \sin\vartheta \right)}_{\text{komplizierte Ortsabhängigkeit}}$$

b) ges: $\vec{H}$ und $\vec{E}$ für großes r

r groß $\Rightarrow \frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2} \gg \frac{1}{r^3}$

$$\Rightarrow \vec{H} \approx A \cdot e^{j(\omega t - kr)} \cdot \left(\frac{jk}{r} + \cancel{\frac{1}{r^2}}\right) \sin\vartheta \, \vec{e_\varphi}$$

$$\vec{E} \approx \frac{A}{\omega\varepsilon} e^{j(\omega t - kr)} \left(\vec{e_r} \left(\cancel{\frac{k}{r^2}} - \cancel{\frac{j}{r^3}}\right) 2 \cos\vartheta + \vec{e_\vartheta} \left(\frac{jk^2}{r} + \cancel{\frac{k}{r^2}} - \cancel{\frac{j}{r^3}}\right) \sin\vartheta \right)$$

$$= \frac{A}{\omega\varepsilon} e^{j(\omega t - kr)} \frac{jk^2}{r} \sin\vartheta \, \vec{e_\vartheta}$$

Es gilt: $k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \Rightarrow \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \underbrace{A e^{j(\omega t - kr)} \frac{jk}{r} \sin\vartheta}_{H_\varphi} \vec{e}_\vartheta$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\varphi \vec{e}_\vartheta$$

ges: Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$

$$\vec{H}^* = A e^{-j(\omega t - kr)} \left(\frac{-jk}{r}\right) \sin\vartheta \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = E_\vartheta \cdot H_\varphi \cdot \underbrace{(\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi)}_{\vec{e}_r} = \left.\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A \cancel{e^{j(\omega t - kr)}} \frac{\cancel{j}k}{r} \sin\vartheta \right\} E_\vartheta$$

$e^0 = 1$ $\quad j \cdot (-j) = 1$

$$\cdot\ A \cdot \cancel{e^{-j(\omega t - kr)}} \left(\frac{\cancel{-j}k}{r}\right) \sin\vartheta$$

$$\cdot \vec{e}_r$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A^2 k^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} \vec{e}_r$$

ges: abgestrahlte mittlere Leistung $\quad \vec{S}_{avg} = \frac{1}{2} Re\{E \times H^*\} = \frac{1}{2} Re\{\vec{S}\}$

Integriert über Kugeloberfläche:

$$P = \iint \frac{1}{2} \vec{S}\, d\vec{f} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A^2 k^2 \frac{\sin^2\vartheta}{\cancel{r^2}} \cancel{\vec{e}_r}}_{\vec{S}} \underbrace{\cancel{r^2} \sin\vartheta\, \cancel{\vec{e}_r}\, d\vartheta\, d\varphi}_{d\vec{f}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A^2 k^2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A^2 k^2 \left[\underbrace{-\cos\vartheta}_{} + \underbrace{\frac{1}{3}\cos^3\vartheta}_{} \right]_0^{\pi}$$

$$-(-1-1) + \frac{1}{3}(-1-1)$$
$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A^2 k^2 \frac{4}{3}$$

$\boxed{A30}$ $\quad \vec{E}_0 = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$

$\mathrm{rot}\, \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{rot}\, \vec{E}_0 = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial x}}_{=0} \vec{e}_z$

$$= + E_0 e^{j(\omega t - kz)} (+jk) \vec{e}_x$$

Ansatz: $\vec{H} = H_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$

$$\Rightarrow -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 H_0 e^{j(\omega t - kz)} (j\omega) \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow + E_0 (\cancel{j}k) \cancel{e^{j(\omega t - kz)}} \cancel{\vec{e}_x} = -\mu_0 (\cancel{j}\omega) H_0 \cancel{e^{j(\omega t - kz)}} \cancel{\vec{e}_x}$$

$$\Rightarrow H_0 = -\frac{k}{\mu_0 \omega} E_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0$$

$k = \omega/c$ im Nichtleiter

$\vec{E}_r = E_r e^{j(\omega t + kz)}$

$\mathrm{rot}\, \vec{E}_r = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x$

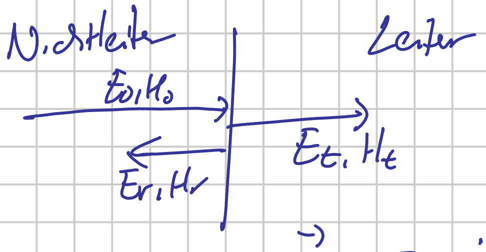
$$= -E_r e^{j(\omega t + kz)} (+jk) \vec{e}_x$$

Ans: $\vec{H} = H_r e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_x$

$$-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 H_r e^{j(\omega t + kz)} (j\omega) \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow -E_r \cancel{e^{j(\omega t + kz)}} (\cancel{j}k) = -\mu_0 H_r \cancel{e^{j(\ldots)}} (\cancel{j}\omega)$$

$$\Rightarrow H_r = + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_r$$



Transmittierte Welle: $\vec{E_t} = E_t e^{j(\omega t - kz)} \vec{e_y}$

ges: H_t gemäß $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ Ansatz: $\vec{H_t} = H_t e^{j(\omega t - kz)} \vec{e_x}$

$$= -\vec{e_x}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \underbrace{\vec{e_z}\frac{\partial E_y}{\partial x}}_{=0} \qquad = -\mu_0 H_t(\cancel{j}\omega)\cancel{e^{j(\omega t - kz)}}\cancel{\vec{e_x}}$$

$$= \cancel{+}\cancel{\vec{e_x}}(\cancel{+j}k) E_t \cancel{e^{j(\omega t - kz)}}$$

$$\Rightarrow E_t \cdot k = -\mu_0 H_t \cancel{\omega} \qquad | : \mu_0$$

$$k = \cancel{\omega}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\left(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow H_t = -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)}}_{1/\Gamma_1} \cdot E_t \qquad \Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\left(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)}}$$

↑ Wellenwiderstand

identisch

b) Wellenwiderstand aus komplexem ε laut Skript

aus 9.4.2.1 folgt $\varepsilon_r = 1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}$

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\left(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)}}$$

c) Grenzbedingungen: $E_{t1} = E_{t2}$, $H_{t1} = H_{t2}$ (t = tangential)

(1) $E_0 + E_r = E_t$ $\qquad H_0 + H_r = H_t$

(2) $-\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_0} E_0 + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_0} E_r = -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0\left(1 - j\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}\right)}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_1} E_t$

Wieder wie in A28: 2 Glgn., 2 Unbekannte (E_r, E_t)

einsetzen, → auflösen nach E_r

Lösung: $E_r = E_0\left(\frac{\Gamma_1 - \Gamma_0}{\Gamma_1 + \Gamma_0}\right)$, $E_t = E_0 \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_0}$

mit a)

$\Rightarrow H_r = \frac{E_0}{\Gamma_0}\left(\quad " \quad \right)$, $H_t = E_0 \frac{2}{\Gamma_1+\Gamma_0}$

d) $\vec{E}_t, \vec{H}_t$ in Phase?

$\vec{E}_t = E_t e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$, $\vec{H}_t = H_t e^{j(\omega t - kz)} \overset{\text{s. a)}}{=} -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1-\frac{jK}{\omega\varepsilon}\right)}} E_t e^{j(\omega t - kz)}$

$= -re^{j\varphi} \cdot e^{j(\omega t - kz)} E_t$

$= -re^{j(\omega t + \varphi - kz)} E_t$

$\mathrm{Re}\{E_{t,y}\} = E_t \cos(\omega t - kz)$

$\mathrm{Re}\{H_t\} \sim -\cos(\omega t + \varphi - kz)$

$\Rightarrow$ E und H sind um φ phasenverschoben

$$\varphi = \angle \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1 - \frac{jK}{\varepsilon_0 \omega}\right)} = \frac{1}{2}\angle \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1 - j\frac{K}{\varepsilon_0\omega}\right) = \frac{1}{2}\angle \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} - j\frac{K}{\mu_0\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-\frac{K}{\mu_0\omega}}{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-K}{\varepsilon_0\omega}\right)$$

Laut Aufgabe: $K \gg \varepsilon\omega \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\arctan(-\infty) = -\frac{1}{2}\pi/2 = -\frac{\pi}{4} \hat{=} -45°$

$$\boxed{\sqrt{re^{j\varphi}} = re^{j\underbrace{\varphi \cdot \frac{1}{2}}_{\varphi \cdot \frac{1}{2}}}}$$