Felder und Wellen Übung 3

11.11.13

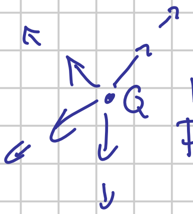
bisher verwendet: Satz vom Hüllenfluss: $\oiint_{\partial K(r)} \vec{D}\, d\vec{f} = \iiint_{K(r)} \varrho\, dv$

im Fall von Kugelsymm: $D_r(r) \cdot A(r) = Q_{ges}(r)$

$\vec{D} = D_r \vec{e}_r$

→ Methode zur Berechnung von $\vec{D}$ aus ϱ, wenn Anordnung komplett symmetrisch

Punktladung Q im Ursprung



radiales Feld

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \vec{e}_r} \sim \frac{1}{r^2}$$

Kugelsymmetrisch

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}} \sim \frac{1}{r}$$

Eine Ladungsverteilung im Raum $\hat{=}$ unendlich vielen Punktladungen unendlich kleinen

→ Superposition

⇒ Coulombintegral:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv'}$$

Methode zur Berechnung von Φ aus ϱ

$\vec{r}$: Ort, an dem das Potential berechnet wird

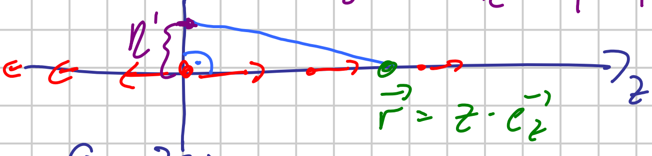
$\vec{r}\,'$: Ort der Ladung. Jedes r' fließt in das Integral ein

AS

geg: homogen geladene Kreisscheibe mit Radius a, Ladung Q

ges: Φ, $\vec{E}$ auf z-Achse

$\vec{r}\,' = 0\vec{e}_z + R'\vec{e}_R + \varphi'\vec{e}_\varphi$



a) $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi a^2}$ da homogen

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,df' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{Q/\pi a^2}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}_{\sqrt{z^2+R'^2}}}\underbrace{R'dR'd\varphi'}_{\text{aus FS}}$$

Ort des Potential

Ort der Ladung

$$= \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{R'}{\sqrt{z^2+R'^2}}\,dR'd\varphi'$$

$$= \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon a^2}\,2\pi\int_0^{a}\frac{R'}{\sqrt{z^2+R'^2}}\,dR'$$

$$\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)' = \left(a^2+x^2\right)^{1/2\,'} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(a^2+x^2\right)^{-1/2}\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left[\sqrt{z^2+R'^2}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow \int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \sqrt{a^2+x^2}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{z^2+a^2}-\sqrt{z^2}\right)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{z^2+a^2}-|z|\right)$$

$$\Phi(\infty) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \lim_{z\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{z^2+a^2}}_{\to\sqrt{z^2}}-\sqrt{z^2}\right) = 0 \quad \checkmark$$

$$\underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{r}=z\vec{e}_z} = -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{z^2+a^2}-|z|\right)$$

$\downarrow (z>0)$

$$= -\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{z^2+a^2}-z\right)\right)$$

betrachte $z>0$

$\vec{E}$ ist spiegelsymm. zu $z=0$

$\rightarrow |z| \rightarrow z$

$$= -\vec{e}_z\frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}-1\right)$$

b) Taylorreihe um $x=a$ $\quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)\cdot(x-a)^2 + \dots$

math. FS $\quad \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

für $|x|<1 \quad \approx 1 - 1/2\, x$

$$\vec E = -\vec e_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\frac{\frac{1}{z}\cdot z}{\sqrt{\frac{a^2}{z^2}+\frac{z^2}{z^2}}} - 1\right)$$

für $z \to \infty$: $\frac{a^2}{z^2} \ll 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\frac{a^2}{z^2}}_{\hat{=}x}+1}}$$

$$\approx -\vec e_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} - 1\right) = \vec e_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon \cancel{a^2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{\cancel{a^2}}{z^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon z^2}\vec e_z$$ für große z

vgl. Punktladung: $\vec E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec e_r$

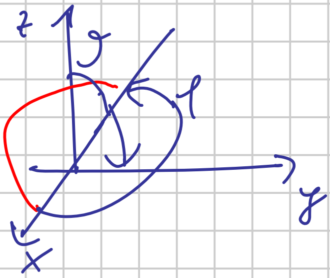
auf z-Achse: $r \to z$

$\Rightarrow$ auf z-Achse: $\vec E$-Felder identisch

$\boxed{A9}$ a) ges: $\Phi(0)$ mit Hilfe des Coulombintegrals

$$\Phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\rho(\vec r')\, dv'}{|\vec r - \vec r'|}$$

$\vec r = 0$, $\rho(\vec r') = \rho$ (const) in Hohlhalbkugel



$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\rho\, dv'}{|\vec r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{r_i}^{r_a}\frac{\rho}{|\vec r'|}\underbrace{r'^2\sin\vartheta'\, dr'\, d\vartheta'\, d\varphi'}_{dv'}$$

in Kugelkoord: $|\vec r'| = r'$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{\rho\, r'^{\cancel{2}}}{\cancel{r'}} \sin\vartheta' \, dr' \, d\vartheta' \, d\varphi'$$

$$= \frac{\rho}{4\cancel{\pi}\varepsilon} \left(\cancel{2\pi - \pi}\right) \cdot 2 \left[\frac{1}{2} r'^2\right]_{r_i}^{r_a}$$

$$\Phi(0) = \frac{\rho}{4\varepsilon}\left(r_a^2 - r_i^2\right)$$

b)

Skript S.62

$$\Phi_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \text{(Punktladung } Q_i \text{ bei } \vec{r}_i\text{)}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \text{(Gesamtwirkung von } N \text{ Punktladungen } Q_i\text{)}$$

$\Delta Q_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta v_i$ (kleine Volumenelemente)

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho(\vec{r}_i)\Delta v_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\downarrow \Delta v_i \rightarrow 0, \ \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')\,dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Pl bei $\vec{r}_i$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\Delta Q_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta v_i$$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho(\vec{r}_i)\Delta v_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

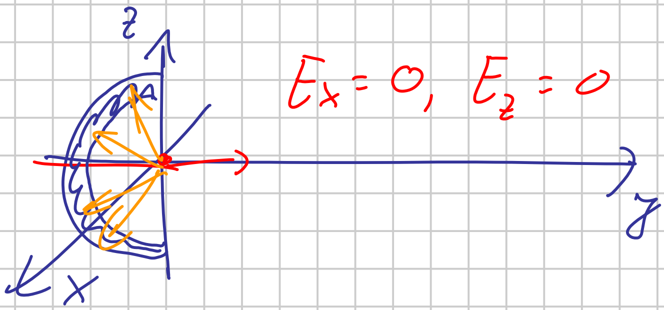
$$\downarrow \Delta v_i \rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\rho(r')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

$$\text{ges: } \underset{\vec{r} = \vec{0}}{\vec{E}(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\rho \cdot (-\vec{r}')}{|\vec{r}'|^3} dv' = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{-\vec{r}'}{r'^{\cancel{3}}} \cancel{r'^2} \sin\vartheta' \cdot dr' d\vartheta' d\varphi'$$

$|\vec{r}'| = r'$ s.oben

$$\frac{\vec{r}'}{r'} = \vec{e}_r{}' = \vec{e}_r{}'(\vartheta, \varphi)$$



$E_x = 0, \ E_z = 0$

$$\vec{e_r} = \sin\vartheta' \cos\varphi' \vec{e_x} + \sin\vartheta' \sin\varphi' \vec{e_y} + \cos\vartheta' \vec{e_z} \quad \text{(aus FS)}$$

$$\int (g(x) + h(x))\, dx = \int g(x)\, dx + \int h(x)\, dx$$

$$\vec{E}(0) = \frac{-\rho}{4\pi\varepsilon} \Big(\underbrace{\iiint \sin\vartheta' \cos\varphi' \vec{e_x} \sin\vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi'}_{=0 \text{ s. Skizze}}$$

$$+ \underbrace{\iiint \ldots \vec{e_z}\, d\ldots}_{=0}$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{r_i}^{r_a} \sin\vartheta' \sin\varphi' \cdot \sin\vartheta' \vec{e_y}\, dr' d\vartheta' d\varphi'$$

$$= \frac{-\rho}{4\pi\varepsilon} (r_a - r_i)(-2) \cdot \int_0^{\pi} (\sin\vartheta')^2 d\vartheta' \vec{e_y}$$

math. FS.

$$= \frac{\rho}{2\pi\varepsilon} (r_a - r_i) \Big[\frac{1}{2}\vartheta' - \frac{1}{4}\sin(2\vartheta') \Big]_0^{\pi} \vec{e_y}$$

$$= \frac{\rho}{4\varepsilon} (r_a - r_i) \vec{e_y}$$