

Felder und Wellen

WS 2013/2014

Musterlösung zur 3. Übung

8. Aufgabe

Lösung mit dem Coulombintegral

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Die Ladungsverteilung hat die Form einer dünnen Scheibe, deshalb wird das Volumen- zum Flächenintegral.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} df'$$

Die geladene Scheibe hat die konstante Flächenladungsdichte $\sigma = Q/\pi a^2$. Das infinitesimale Flächenelement ist gleich

$$df' = r' d\varphi' dr'$$

Für einen beliebigen Punkt auf der z -Achse gilt $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r'^2}$.

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} d\varphi' dr'$$

Der Integrand hängt nicht von φ' ab, deshalb ergibt das Integral über den Winkel 2π

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \int_0^a \frac{r'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} dr' \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \left[\sqrt{z^2 + r'^2} \right]_0^a \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right) \end{aligned}$$

Anmerkung: Das Coulombintegral bestimmt das Potential bis auf eine additive Konstante. Diese Konstante wird zur Erfüllung der Randbedingung $\Phi(\infty) = 0$ benötigt. Die Konstante ist in diesem Fall null (zu Überprüfen durch Grenzübergang $z \rightarrow \infty$). Aus Φ wird das $\vec{E}$ -Feld mit der Formel

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

berechnet. $\vec{E}$ hat auf der z -Achse nur eine z -Komponente und hängt nur von z ab (wegen der Zylindersymmetrie), deshalb

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= -\frac{\sigma}{2\epsilon} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right) \vec{e}_z \\ &= \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z & \text{für } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon} \left(-1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z & \text{für } z < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Zum Vergleich mit dem Feld einer Punktladung wird das $\vec{E}$ -Feld als Funktion der Gesamtladung Q geschrieben.

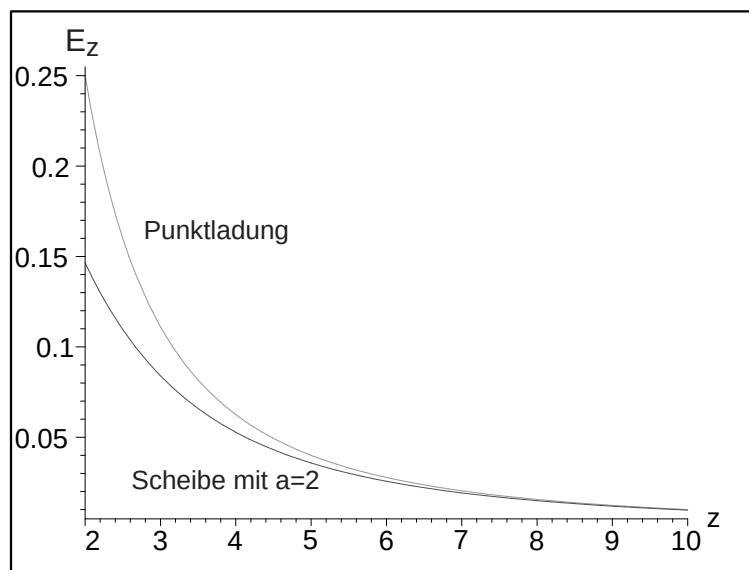
$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon a^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z, \quad \text{für } z > 0$$

Wird z sehr groß gegenüber a gilt (Reihenentwicklung aus Bronstein)

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2/z^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} \quad \text{für } \frac{a}{z} \ll 1$$

Das Elektrische Feld nähert sich dem einer Punktladung an

$$\vec{E}(z) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon z^2} \vec{e}_z$$

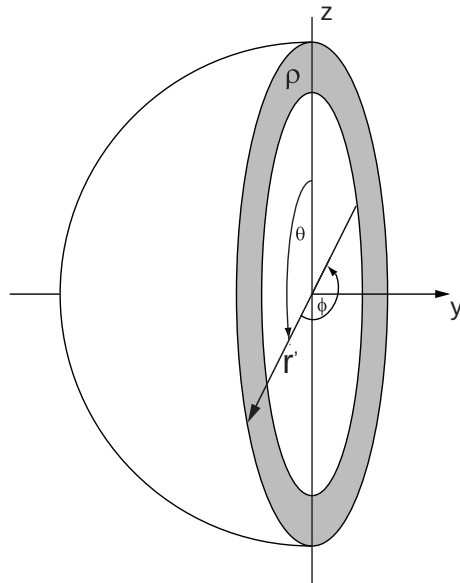


9. Aufgabe

a) Coulomb-Integral:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' (+C)$$

Das Potential wird am Ort $\vec{r} = 0$ bestimmt. $\vec{r}'$ ist der Ort der Raumladungs-



dichte.

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{0}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho}{|\vec{0} - \vec{r}'|} dv' \\
 &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r'} r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi' \\
 &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_{r_i}^{r_a} \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \\
 &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} (r_a^2 - r_i^2) [-\cos \vartheta']_0^{\pi} d\varphi' \\
 &= \frac{\rho}{4\epsilon} (r_a^2 - r_i^2)
 \end{aligned}$$

- b) Das $\vec{E}$ -Feld kann *nicht* mit $\vec{E} = -\text{grad} \Phi$ berechnet werden, da Φ nur für einen Punkt, nicht aber für die benachbarten Punkte berechnet wurde. Das $\vec{E}$ -Feld wird über das Coulombintegral berechnet.

$\vec{E}$ -Feld für Punktladung im Ursprung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{mit} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$\vec{E}$ -Feld für Punktladung Q_i am Ort $\vec{r}_i$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Gesamtwirkung aller N Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Übergang zum Kontinuum

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

$\vec{r} = \vec{0}$, $\vec{r}' = r' \vec{e}_r$, $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = r'^3$ eingesetzt:

$$\vec{E}(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}') (-\vec{e}_{r'})}{r'^2} dv'$$

Der Einheitsvektor in $\vec{r}'$ -Richtung (in Kugelkoordinaten) wird durch die Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten ausgedrückt, weil die Abhängigkeit von ϑ' und φ' sonst verborgen bleiben würde:

$$\vec{e}_{r'} = \vec{e}_{x'} \sin \vartheta' \cos \varphi' + \vec{e}_{y'} \sin \vartheta' \sin \varphi' + \vec{e}_{z'} \cos \vartheta'$$

Wegen der Symmetrie des Problems hat das Feld nur eine y' -Komponente

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}) &= \frac{-1}{4\pi\varepsilon} \int_{r_i}^{r_a} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varrho(\vec{r}') \sin \vartheta' \sin \varphi'}{r'^2} r'^2 \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' dr' \vec{e}_{y'} \\ &= \frac{-\varrho}{4\pi\varepsilon} (r_a - r_i) \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta' \sin \varphi' d\vartheta' d\varphi' \vec{e}_{y'} \\ &= \frac{-\varrho}{4\pi\varepsilon} (r_a - r_i) \underbrace{\left[-\cos \vartheta' \right]_{\pi}^{2\pi}}_{=-2} \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta' d\vartheta' \vec{e}_{y'} \\ &= \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon} (r_a - r_i) \left[\frac{1}{2} \vartheta' - \frac{1}{2} \cos \vartheta' \sin \vartheta' \right]_0^{\pi} \vec{e}_{y'} \\ &= \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon} (r_a - r_i) \frac{\pi}{2} \vec{e}_{y'} \\ &= \frac{\varrho}{4\varepsilon} (r_a - r_i) \vec{e}_{y'} \end{aligned}$$