FdW Übung 4

18.11.2013

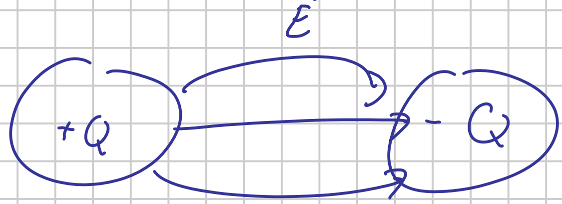
Einleitung

Bisher: $\vec{E}(\vec{r})$, $\Phi(\vec{r})$ betrachtet: Funktionen des Ortes, im ganzen Raum definiert

$\rightarrow$ sehr viel Information

Versuche, auf wesentliche Größen zu reduzieren

- Φ ist auf der Oberfläche einer Elektrode (idealer Leiter)
  $\rightarrow$ Potential eines Punktes auf dem Leiter = „Potential des Leiters"
  $\kappa = \infty \rightarrow \vec{E} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = 0 \rightarrow \rho = 0$
  Leitfähigkeit
- Spannung $U = \Phi_2 - \Phi_1$ (Potentialdifferenz, unabh. von Normierung, wie z.B. $\Phi(\infty) = 0$)
- Betrachte 2 Leiter mit $+Q$, $-Q$



Man stellt fest: $Q \sim U$

mit C („Kapazität") $\Rightarrow$ $\boxed{Q = CU}$ (2 Leiter $+Q/-Q$)

- Mehrere Leiter mit beliebigen Ladungen Q_i

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix}}_{\text{quadratisch, symmetrisch}} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Verallgemeinerung zu Influenzkoeffizienten

Inverses Problem: Matrix der Potentialkoeffizienten

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

Energie im elektrischen Feld

- allg. Definition $W_e = \iiint w_e \, dv$ → Lösung erfordert Berechnung des Volumenintegrals

  $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$

  Skript S. 68

- Berechnung über Kapazität (bzw. Potentialkoeff.)

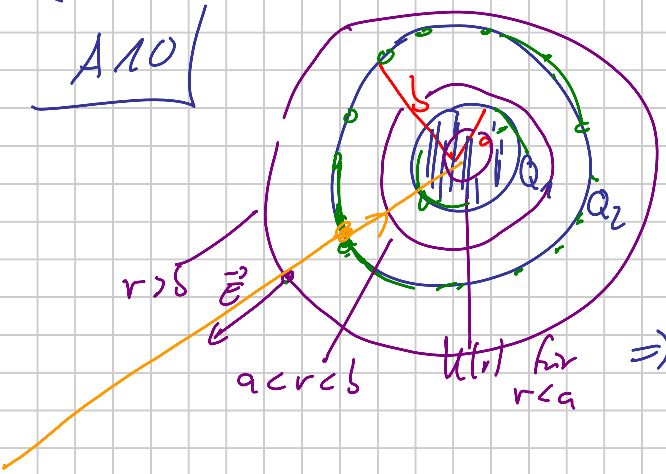
$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q^2/C$$

oder

$$W_e = \frac{1}{2} (Q_1, \dots, Q_N) \begin{pmatrix} p_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & p_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (\Phi_1 \dots \Phi_N) \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & c_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix}$$

A10



a) ges. $\vec{E}$, Φ geg. Q_1, Q_2, $\Phi(\infty) = 0$

Kugelsymm. Anordnung $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \vec{e}_r$

$\Phi(\vec{r}) = \Phi(r)$

$\Rightarrow$ Satz vom Hüllenfluss besser zu rechnen als Coulombintegral

Zuerst: Bestimme $\vec{E}$

$$\underset{\partial V(r)}{\oiint} \vec{D} \, d\vec{a} = \underset{V(r)}{\iiint} \rho \, dv$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} D_r(r) \vec{e}_r \, \vec{e}_r r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 D_r(r)$$

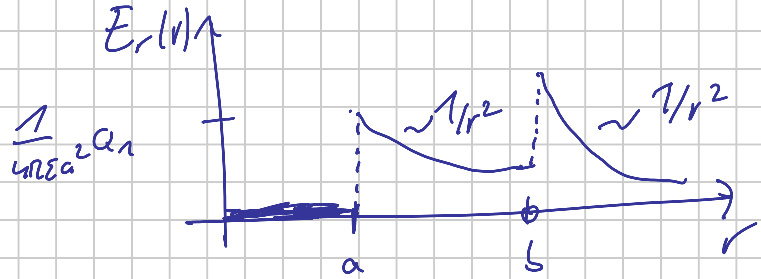
Wie viel Ladung ist in $U(r)$ für $r<a$? $\iiint \varrho \, dv = Q_{ges}(r)$
$= 0 \quad (r<a)$

für $a<r<b$? $\quad Q_{ges}(r) = Q_1$

$r>b$? $\quad Q_{ges}(r) = Q_1 + Q_2$

$$4\pi r^2 \underbrace{D_r(r)}_{\varepsilon E_r(r)} = Q_{ges}(r)$$

$$\rightarrow E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \begin{cases} 0 & r<a \\ Q_1, & a \leq r \leq b \\ Q_1+Q_2 & r>b \end{cases}$$



Für $r>b$ ist $\vec{E}$ das Feld einer Punktladung mit $Q = Q_1+Q_2$

mit $\Phi(\infty) = 0 \rightarrow \Phi(r) = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon r} \quad r \geq b$ (Pot. einer PL mit $Q = Q_1+Q_2$)

$$\underbrace{\Phi(r)}_{\text{gesucht}} - \underbrace{\Phi(b)}_{\text{bekannt}} = -\int_b^r \vec{E}\, d\vec{l} \quad \rightarrow \Phi(r) = \Phi(b) - \int_b^r \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r'^2} dr'$$

$(a \leq r < b)$

$= $ 1-dim. Integral lösen ...

$$\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon b} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon b} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{b}\right)$$

$$\Phi(r<a) = \Phi(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{b}\right)$$

b) aus a) $\underline{\Phi_1} = \Phi(r<a) = \Phi(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{b}\right)$

$$\Phi_2 = \Phi(b) = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon b}$$

Potentialkoeffizientenmatrix: $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon a} & \frac{1}{4\pi\varepsilon b} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon b} & \frac{1}{4\pi\varepsilon b} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$

Influenzkoeff. - Matrix $B = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\begin{pmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/b \end{pmatrix}\right)^{-1} = 4\pi\varepsilon \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}-\frac{1}{b^2}}_{}}\begin{pmatrix} 1/b & -1/b \\ -1/b & 1/a \end{pmatrix}$$

$$\frac{ab^2}{b-a}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon}{b-a}\begin{pmatrix} ab & -ab \\ -ab & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{4\pi\varepsilon}{b-a}\begin{pmatrix} ab & -ab \\ -ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$$

c) Energieberechnung über das Feld

$$W_e = \iiint \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}\,dv = \frac{1}{2}\cancel{\iiint_{r=0}^{a} \varepsilon\cdot 0\,dv}^{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r=a}^{b} \frac{\cancel{\varepsilon}\, Q_1^2}{(4\pi)^2\varepsilon^{\cancel{2}}\, r^{\cancel{4}2}}\,\cancel{r^2}\sin\vartheta\cdot dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

$$\vec{E}\cdot\vec{D} = E_r(r)\cancel{\vec{e}_r}\cdot\varepsilon E_r(r)\cancel{\vec{e}_r} = \varepsilon E_r(r)^2$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^{\infty} \frac{\cancel{\varepsilon}(Q_1+Q_2)^2}{(4\pi)^2\varepsilon^{\cancel{2}}\, r^{\cancel{4}2}}\,\cancel{r^2}\sin\vartheta\cdot dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2(4\pi)^2\varepsilon}\left(\iiint_a^b \frac{Q_1^2}{r^2}\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi + \iiint_b^{\infty}\frac{(Q_1+Q_2)^2}{r^2}\sin\vartheta\,dr\cdot d\vartheta\,d\varphi\right)$$

$$= \dots = \frac{1}{2(4\pi)^{\cancel{2}}\varepsilon}\left(\left[-\cancel{4\pi}\frac{Q_1^2}{r}\right]_a^b + \left[-\cancel{4\pi}\frac{(Q_1+Q_2)^2}{r}\right]_b^{\infty}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1^2}{a} - \frac{Q_1^2}{b} + \frac{(Q_1+Q_2)^2}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1^2}{a} + \frac{2Q_1Q_2 + Q_2^2}{s}\right) = W_e \text{ (über Feld)}$$

Berechnung über Matrizen:

$$W_e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\begin{pmatrix} 1/a & 1/s \\ 1/s & 1/s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\begin{pmatrix} Q_1/a + Q_2/s \\ Q_1/s + Q_2/s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left(Q_1^2/a + \frac{Q_1Q_2}{s} + \frac{Q_2Q_1}{s} + \frac{Q_2^2}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1^2}{a} + \frac{2Q_1Q_2 + Q_2^2}{s}\right) \hat{=} W_e \text{ von oben}$$

d) $Q_1 = -Q_2 = Q$, ges C: $Q = CU = C\left(\Phi(a) - \Phi(s)\right)$

gemäß a) $\Phi(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{s}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{a} - \frac{Q}{s}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right)$

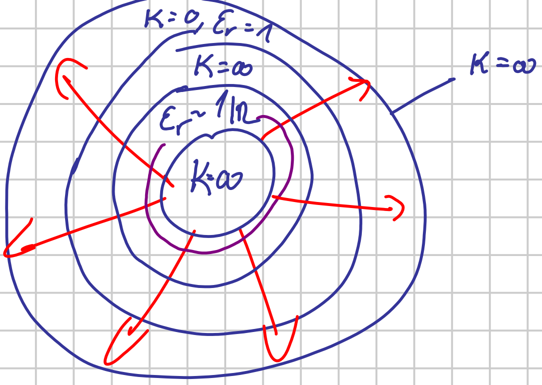
$$\Phi(s) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon s} = 0 \quad (\text{auch } \vec{E} = 0 \text{ für } r > s)$$

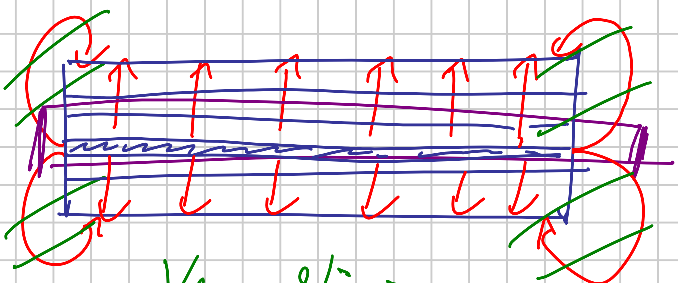
wegen $Q_1 = -Q_2$

$$Q = C \cdot \left(\Phi(a) - \Phi(s)\right) = C\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right) - 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{s}}}$$

A11





Vernachlässigung von Randeffekten

a) ges $\vec{E}$ $\quad R < R_a \quad$ da $\kappa = \infty \rightarrow \vec{E} = 0$

$E_R(R_a < R < 2R_a) = ?$ $\quad \iint \varepsilon \vec{E}\, d\vec{A} = \underbrace{\iiint \rho\, dv}_{Q}$ $\quad \vec{E} = E_R(R)\vec{e}_R$, $\quad d\vec{A} = R\vec{e}_R\, d\varphi dz$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \varepsilon(R) E_R(R) \cancel{\vec{e}_R} \cdot \underbrace{\cancel{\vec{e}_R} R\, d\varphi dz}_{d\vec{A}} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{2R_a}{\cancel{R}} \varepsilon_0\, E_R(R) \cdot \cancel{R}\, d\varphi dz$$

$$= 2\pi \cdot L \cdot 2R_a \varepsilon_0 E_R(R) = Q \Rightarrow E_R(R) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R_a L} \quad (\text{const.!})$$

$E_R(2R_a < R < 3R_a) = 0 \quad (\kappa = \infty)$

$3R_a < R < 4R_a$: $\quad \iint \varepsilon_0 \vec{E}\, d\vec{A} = Q = 2\pi R L \varepsilon_0 E_R(R)$

$$\Rightarrow E_R(R) = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0 R}$$

$E(R \geq 4R_a) = 0$, da Φ const.