

Felder und Wellen

WS 2013/2014

Musterlösung zur 5. Übung

12. Aufgabe

Berechnung der allgemeinen Kapazität eines Zylinderkondensators. Die elektrische Verschiebungsdichte ist radial gerichtet.

$$\vec{D} = D_r \vec{e}_r$$

Auf einer Zylindermantelfläche ist $\vec{D}$ konstant. Aus dem Gauß'schen Satz ergibt sich

$$2\pi r l D_r = Q$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi r l} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l} \vec{e}_r$$

Die Spannung zwischen den Elektroden wird mit Hilfe des Linienintegrals über die Feldstärke berechnet.

$$\begin{aligned} U &= \Phi(r_a) - \Phi(r_i) \\ &= - \int_{r_i}^{r_a} \vec{E} d\vec{s} \\ &= - \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr \\ &= - \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{r_a}{r_i} \\ \Rightarrow Q &= - \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{r_a}{r_i}} U \end{aligned}$$

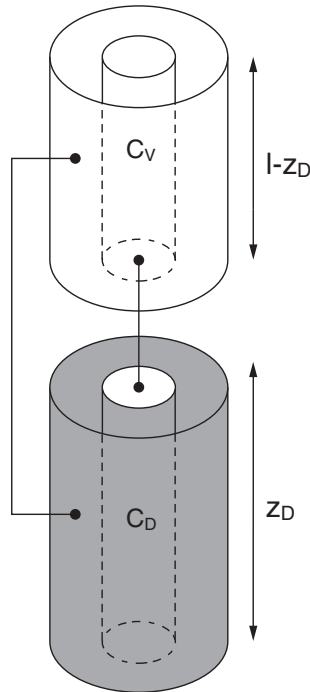
Daraus ergeben sich die Formeln für die Kapazität C sowie $\vec{E}$ und $\vec{D}$ in Abhängigkeit von der Spannung.

$$\vec{D} = -\frac{\varepsilon U}{r \ln \frac{r_a}{r_i}} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = -\frac{U}{r \ln \frac{r_a}{r_i}} \vec{e}_r$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

- a) Die Anordnung wird als Aufbau von zwei räumlich getrennte Kondensatoren interpretiert, die eine variable Höhe haben. Die Elektroden sind verbunden, so dass auf beiden Kondensatoren $U = U_0$ gilt.



Es gilt im oberen Kondensator (Vakuum, $z_D \leq z \leq l$)

$$\vec{E}_V = \frac{-U_0}{r \ln \frac{r_a}{r_i}} \vec{e}_r$$

$$\vec{D}_V = \frac{-\varepsilon_0 U_0}{r \ln \frac{r_a}{r_i}} \vec{e}_r$$

$$\sigma_V(r = r_i) = \vec{D}_V(r = r_i) \cdot \vec{e}_r = \frac{-\varepsilon_0 U_0}{r_i \ln \frac{r_a}{r_i}}$$

Im unteren Kondensator (Dielektrikum, $0 \leq z \leq z_D$) gilt

$$\begin{aligned}\vec{E}_D &= \frac{-U_0}{r \ln \frac{r_a}{r_i}} \vec{e}_r \\ \vec{D}_D &= \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_r U_0}{r \ln \frac{r_a}{r_i}} \vec{e}_r \\ \sigma_D(r = r_i) &= \vec{D}_D(r = r_i) \cdot \vec{e}_r = \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_r U_0}{r_i \ln \frac{r_a}{r_i}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}U &= U_0 \\ Q &= Q_V + Q_D \\ C &= \left| \frac{Q_V + Q_D}{U_0} \right| = C_V + C_D\end{aligned}$$

Die Anordnung entspricht also der Parallelschaltung zweier Kondensatoren. Für die Gesamtkapazität gilt:

$$C = C_V + C_D = \frac{1}{U_0} \left(\frac{2\pi\varepsilon_0(l - z_D)U_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} + \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r z_D U_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \right) = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} (l + (\varepsilon_r - 1)z_D)$$

c) Abtrennen von U. Ladung Q bleibt konstant

$$Q = C(z_D = l)U_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln \frac{r_a}{r_i}} U_0$$

Durch das Herausziehen des Dielektrikums ändert sich die Spannung auf U (bei konstantem Q).

$$U = \frac{Q}{C(z_D = l/2)} = \frac{\varepsilon_r l}{(l + (\varepsilon_r - 1)l/2)} U_0 = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} U_0$$

d) Durch das Herausziehen des Dielektrikums, wird die Kapazität des Kondensators bei konstanter Ladung erniedrigt. Dadurch wird die im Kondensator gespeicherte (Feld-)Energie wegen $W = 0.5 \frac{Q^2}{C}$ erhöht. Die Kraft F_C , die der Kondensator auf das Dielektrikum ausübt ist:

$$\vec{F}_C = -\frac{dW}{dz} \vec{e}_z$$

Die Kraft F , die man aufbringen muss, um das Dielektrikum herauszuziehen, hat jedoch entgegengesetztes Vorzeichen:

$$\begin{aligned}F = -F_C &= \frac{dW}{dz} \vec{e}_z \\ &= \frac{dW}{dC} \frac{dC}{dz} \vec{e}_z \\ &= -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dz} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Berechnet werden muß also die Ableitung von C nach z .

$$C(z_D) = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} (l + (\epsilon_r - 1)z_D)$$

$$\frac{dC}{dz_D} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} (\epsilon_r - 1)$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} (\epsilon_r - 1) \vec{e}_z$$

Q und C aus den Aufgabenteilen a) bis c) eingesetzt

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{(\epsilon_r l)^2 U_0^2}{(l + (\epsilon_r - 1)z_D)^2} \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} (\epsilon_r - 1) \vec{e}_z$$

13. Aufgabe

Geeignet zur Lösung des Problems sind Zylinderkoordinaten. Wegen der unendlichen Ausdehnung kann nichts von der z -Koordinate abhängen. Das Potential auf den Leitern ist konstant. Deshalb und wegen der unendlichen Ausdehnung in r -Richtung hängt das Potential nicht von r ab.

$$\Phi = \Phi(\varphi) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

a) Daraus folgt die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = C_1$$

$$\Phi(\varphi) = C_1 \varphi + C_2$$

Das Potential auf den Leiterplatten ist Φ_1 und Φ_2 also

$$\Phi(\varphi_1) = C_1 \varphi_1 + C_2 = \Phi_1$$

$$\Phi(\varphi_2) = C_1 \varphi_2 + C_2 = \Phi_2$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten. Durch Subtraktion der Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} C_1(\varphi_2 - \varphi_1) &= \Phi_2 - \Phi_1 \\ \Rightarrow C_1 &= \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \end{aligned}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$C_2 = \Phi_1 - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \varphi_1$$

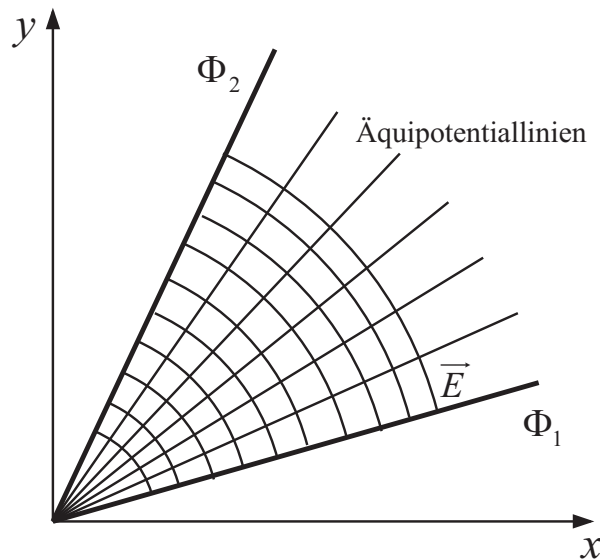
Damit sind die Konstanten bestimmt und für das Potential folgt

$$\Phi(\varphi) = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \varphi + \Phi_1 - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \varphi_1$$

b) Das $\vec{E}$ -Feld wird mit dem Gradienten berechnet.

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \vec{e}_\varphi = \vec{E}(r)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$



c) Die Flächenladungsdichte ist gleich der Normalenkomponente des $\vec{D}$ -Feldes.

$$\sigma(\varphi_1) = -\frac{\varepsilon_0}{r} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \varepsilon_0 E_\varphi$$

$$\sigma(\varphi_2) = \frac{\varepsilon_0}{r} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = -\varepsilon_0 E_\varphi$$

d) Die Ladung pro Länge l in z -Richtung wird als Integral über die Flächenladungsdichte berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{l} &= \int_{r_1}^{r_2} \sigma(\varphi_1) dr = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\varepsilon_0}{r} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} dr \\ &= -\varepsilon_0 \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} [\ln r]_{r_1}^{r_2} \\ &= \varepsilon_0 \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \ln \frac{r_1}{r_2} \\ \frac{Q_2}{l} &= -\frac{Q_1}{l} \end{aligned}$$

e) Kapazität pro Länge:

$$\frac{C}{l} = \left| \frac{Q}{U l} \right| = \frac{Q_2}{l(\Phi_2 - \Phi_1)} = \frac{\varepsilon_0}{\varphi_2 - \varphi_1} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

14. Aufgabe

Die Oberflächen von Leitern sind Äquipotentialflächen auf denen die Feldlinien immer senkrecht stehen. Für kugelsymmetrische Oberflächen folgt daraus

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$$

Das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Anordnung kann mit dem Gaußschen Satz berechnet werden. Das Feld ist dabei auf einer Kugeloberfläche konstant.

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Dieses Feld hat die gleiche Form, wie das einer Punktladung im Ursprung. Das Ergebnis wurde mit Hilfe des Gaußschen Satzes und allein unter der Voraussetzung der Kugelsymmetrie berechnet. Es gilt deshalb allgemein für das elektrische Feld *außerhalb* jeder kugelsymmetrischen Ladungsverteilung.

Im Folgenden wird immer $\Phi(\infty) = 0$ gewählt. Diese Wahl ist aber willkürlich, da in der Aufgabe nichts verlangt war.

- a) Innerhalb der Kugelfläche ist das Feld gleich Null (Beweis mit dem Gaußschen Satz)

$$0 < r < r_i : \quad E_r = 0$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$r_i \leq r : \quad E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- b) Das Feld hat zwischen 0 und r_a die gleiche Form wie bei a) für $r > r_a$ sind $\vec{E} = 0$ und $\Phi = \text{const.}$

$$r_a \leq r : \quad E_r = 0$$

$$\Phi = 0$$

$$r_i < r < r_a : \quad E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi(r) - \Phi(r_a) = - \int_{r_a}^r E_r dr$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$r \leq r_i : \quad E_r = 0$$

$$\Phi(r) = \text{const} = \Phi(r_i)$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

- c) Zwischen den Kugelflächen bei r_1 und r_2 ist das Feld gleich Null, aufgrund der idealen Leitfähigkeit. Damit der Gauss'sche Satz erfüllt ist, muss an der Leiterinnenseite bei r_1 die Influenzladung $-Q$ und an der Leiteraussen-seite die Influenzladung $+Q$ vorhanden sein. Das Potential wird durch Integration von $\vec{E}$ bestimmt.

$$r_a \leq r : E_r = 0$$

$$\Phi = 0$$

$$r_2 \leq r < r_a : E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Phi(r) - \Phi(r_a) = - \int_{r_a}^r E_r dr$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$r_1 \leq r < r_2 : E_r = 0$$

$$\Phi(r) = \text{const} = \Phi(r_2)$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$r_i \leq r < r_1 : E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Phi(r) - \Phi(r_1) = - \int_{r_1}^r E_r dr$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$r < r_i : E_r = 0$$

$$\Phi(r) = \text{const} = \Phi(r_i)$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_a} \right)$$

