FW Übung 6

02.12.13

Einleitung: Laplace-Gleichung und Separationsansatz

Wdh: $\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\varepsilon\vec{E} = \rho$ $\quad$ $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$

$$\Delta\Phi = -\rho/\varepsilon$$

$\rho = 0$

$$\boxed{\Delta\Phi = 0}$$ (ladungsfreier Raum)

Eindeutigkeitssatz: Wenn ein Φ vorliegt, das die Randbedingungen und $\Delta\Phi = 0$ erfüllt (Dirichlet-Problem), dann ist die gefundene Lösung die einzige Lösung.

Lösungsmethoden:
- Vereinfachung durch Symmetrie
  → eindimensionale Integration (vgl. Ü5)
- numerisch
- Separationsansatz

Separationsansatz

- kann erfolgreich sein, wenn die Randbedingungen auf Flächen gegeben sind, für die eine Koordinate konst. ist

→ aus Randfläche ergibt sich Wahl des Koordinatensystems

Kartesische Koordinaten:
$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

Ansatz: $\Phi(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$

$$\Rightarrow \Delta\Phi = 0 = \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial z^2}$$

$|:X(x)$ $\quad |:Y(y)$ $\quad |:Z(z)$

$\Big\downarrow$ Separation der Variablen

$$0 = \underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{\text{nur von } x \text{ abh.}} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}_{\text{nur von } y \text{ abh.}} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}_{\text{nur von } z \text{ abh.}}$$

$$-\alpha^2 \qquad\qquad -\beta^2 \qquad\qquad \gamma^2$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 \quad \rightarrow \quad \{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\} \qquad (\alpha \neq 0)$$

Y genauso

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 \quad \rightarrow \quad \{e^{\gamma z}, e^{-\gamma z}\} \qquad (\gamma \neq 0)$$

Anmerkungen:

- Vorzeichen von $\alpha^2/\beta^2/\gamma^2$ beeinflusst Form der Lösung
- $\alpha = 0 \rightarrow X(x) = Ax + B$ (vgl. Lösung 5)
- Die Randbedingungen der Laplace-Glg. können ggf. durch Überlagerung von partikulären Einzellösungen erfüllt werden

$$\Phi_{allg.} = \sum_i C_i \Phi_i$$

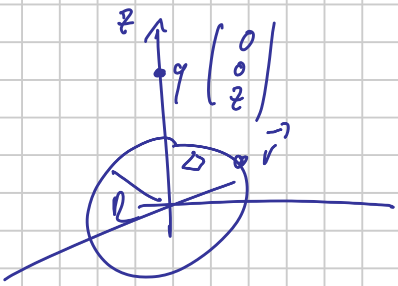
- Die Koeffizienten C_i werden durch die Randbedingungen bestimmt

---

$\boxed{A15}$

ges: durchschnittliches Potential auf Kugel $\bar{\Phi}_D$

$$\llcorner \frac{\sum \text{Potential} \cdot (\text{Fläche des Potential})}{\text{Ges.-Oberfläche der Kugel}} \quad \llcorner \; 4\pi R^2$$



Potential am Ort $\vec{r}$ einer Punktladung

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\right|}$$

$$\vec{r} = R \cdot \vec{e}_r = R \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\Phi}_D = \frac{1}{4\pi R^2} \iint \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \sqrt{\underbrace{R^2\sin^2\vartheta \cos^2\varphi + R^2\sin^2\vartheta \sin^2\varphi}_{R^2\sin^2\vartheta(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1})} + (R\cos\vartheta - z)^2}} \, df$$

$$= \frac{q}{(4\pi)^2 R^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{R^2\sin^2\vartheta + R^2\cos^2\vartheta}_{=R^2} - 2R\cos\vartheta\, z + z^2}} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{q \cdot \cancel{R^2}}{(4\pi)^2 \cancel{R^2} \varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rz\cos\vartheta + z^2}} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$\underline{\bar{\Phi}_D} = \ldots = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{Rz} \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\vartheta} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{Rz} \left(\underbrace{\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(z-R)^2}}_{R+z \;-\; z+R \;=\; 2R} \right) \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z} = \underline{\Phi(0)}$$

$\Rightarrow$ Es gilt allg.: Im ladungsfreien Raum ($\rho = 0$, $\Delta\Phi = 0$) ist das Potential gleich dem Mittelwert des Potentials seiner Nachbarpunkte

A16

$$\Delta \Phi = 0 \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}_{=0} = 0$$

Randbedingungen: $\underline{\Phi = 0}$ für $y = 0$, $\underline{y = a}$ $\qquad \Phi \to 0$ für $x \to \infty$

$\Phi = V_0$ für $x = 0$

$$\Phi = X(x) \cdot Y(y) \to \frac{\partial^2 (X(x) Y(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X(x) Y(y))}{\partial y^2} = 0$$

$$Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \quad | : X(x) \quad | : Y(y)$$

Variablenseparation

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{\text{nur von } x \text{ abh.}} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}_{\text{nur von } y \text{ abh.}} = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

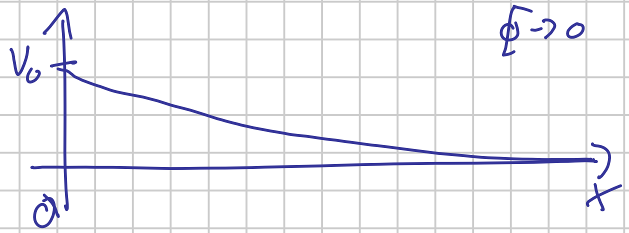
$\to C_1$ und C_2 haben unterschiedliches Vorzeichen

$\to C_1 = k^2, \quad C_2 = -k^2$

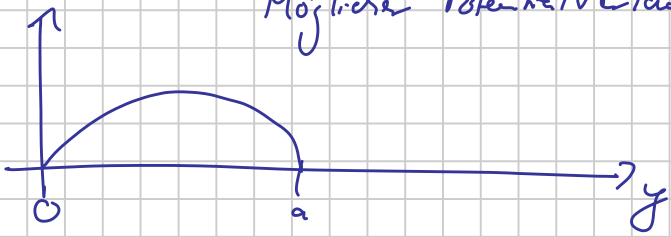
$(C_1 = -k^2, \quad C_2 = +k^2)$

(1) $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = k^2 \to X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$

(2) $\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k^2 \to Y = C\sin(ky) + D\cos(ky)$



Möglicher Potentialverlauf



$$\to \underline{\Phi(x,y)} = X(x) \cdot Y(y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\sin ky + D\cos ky)$$

$(k > 0)$ $A \overset{!}{=} 0$, sonst nicht $\Phi \to 0$ für $x \to \infty$ $\forall y$

$$= \underbrace{B e^{-kx}}\left(C \sin ky + D \cosh y\right) \qquad C_{neu} = BC$$
$$D_{neu} = BD$$

$$= \underline{e^{-kx}\left(C \sin ky + D \cosh y\right)}$$

$$\underset{\overset{!}{=}0}{\Phi(x, y=0)} = e^{-kx}\left(C \underset{=0}{\sin(0)} + D \underset{=1}{\cos(0)}\right) = e^{-kx} \cdot D \overset{!}{=} 0 \quad \forall x$$

$$\boxed{D = 0}$$

$$\Phi(x,y) = C e^{-kx} \cdot \sin(ky) \qquad \underset{\overset{!}{=}0}{\Phi(x, y=a)} = C e^{-kx} \cdot \sin(ka) \overset{!}{=} 0$$

$C = 0$ dann $\Phi = 0$

$\sin(ka) = 0$

$$\sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = n \cdot \pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \Big(\text{aus } n = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \Phi = 0\Big)$$
$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$$

letzte Randbedingung: $\Phi(x=0, 0 < y < a) \overset{!}{=} V_0$

$$\Phi(0,y) = C e^{-\frac{n\pi}{a}x} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \overset{!}{=} V_0 \qquad 0 < y < a$$

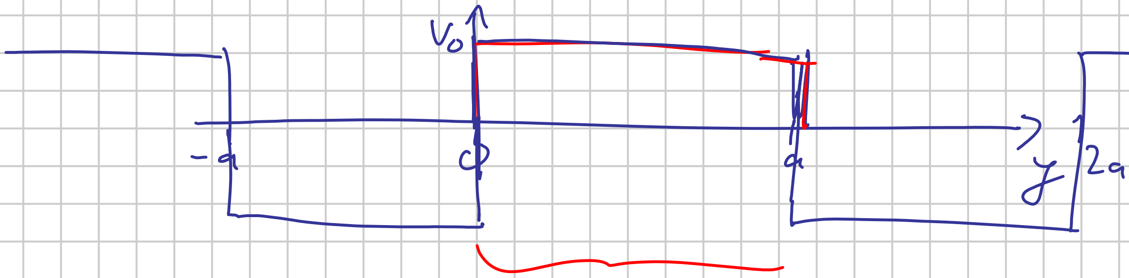
sin ist nicht konst.
→ so nicht lösbar!

Aber: Wegen Linearität der Laplace-Glg. gilt
Wenn $\Phi_1(x,y)$ und $\Phi_2(x,y)$ Lösungen sind, ist auch $C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2$ eine Lösung der Laplace-Gleichung!

$$\rightarrow \Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

$$\Phi(x=0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \Rightarrow C_n \text{ so wählen, dass RB erfüllt ist}$$

→ entspricht der Suche von Koeffizienten einer Fourierreihe!
Wegen $\sum \sin(..)$ können nur ungerade Funktionen dargestellt werden!



$S(y)$: Rechteck-Funktion mit Periode $2a$

→ Fourierreihe für Rechteckfunktion benötigt

→ math. FS   Fourierreihe für Rechteckfunktion mit Periode $2a$ und Amplitude b

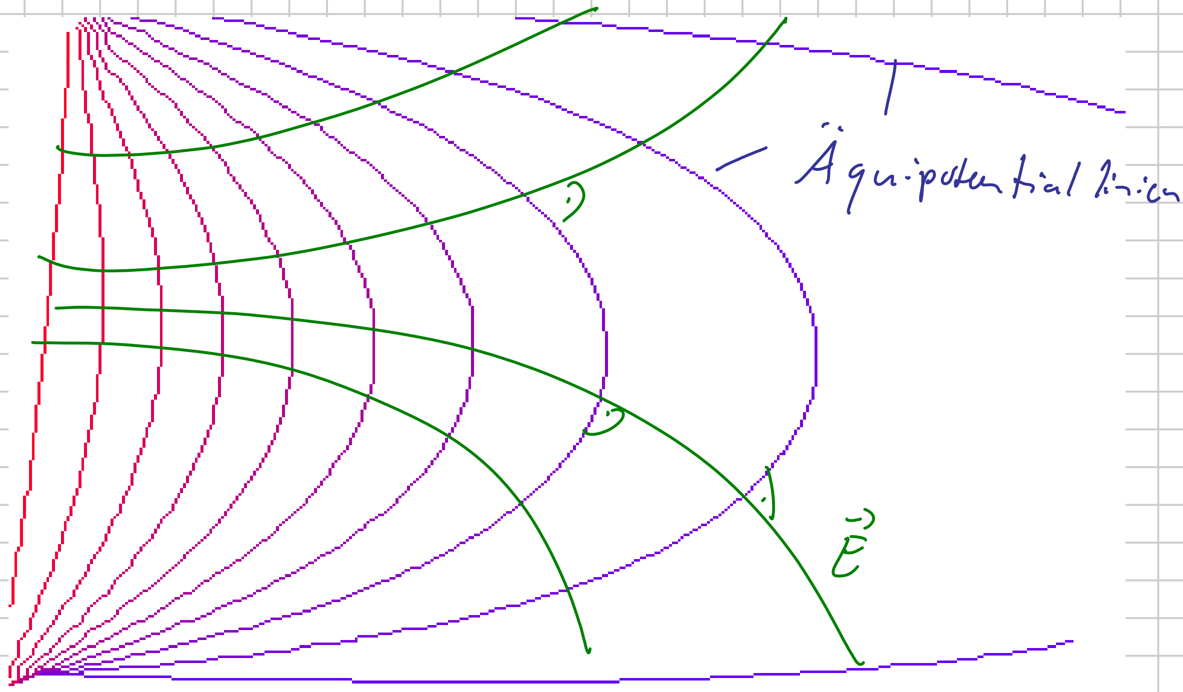
$$R(x) = \frac{4b}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{a}x\right)}{2k+1}$$

$$S(y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{a}y\right)}{2k+1} \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$\Rightarrow C_n = 0$ für $n = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$ (gerades n)

$C_n = \frac{4V_0}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ $n = 2m+1$ ungerades n

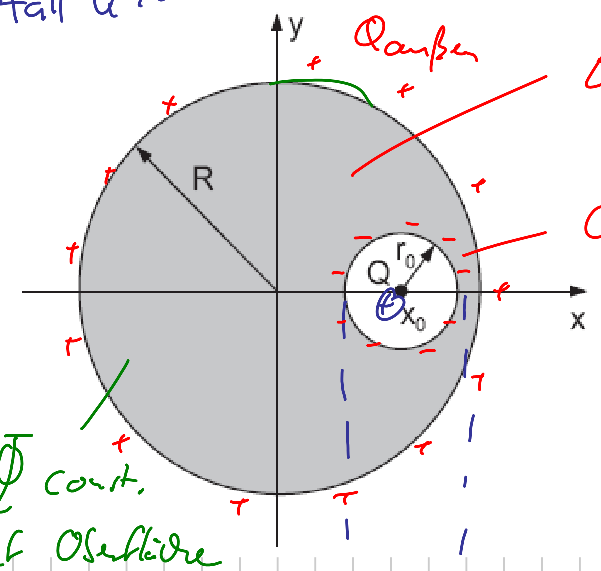
$$\Rightarrow \Phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$



A17

Fall $Q > 0$

$\Phi = ?$



$Q_{außen}$

$\vec{E} = 0$

Q_{innen} : Flächenladungsdichte, die Q gerade ausgleicht

$\rightarrow Q_{innen} = -Q$

Φ const. auf Oberfläche

$\downarrow \Delta\Phi = 0$

Φ muss kugelsymm.

$\rightarrow \vec{E}$ muss kugelsymm. sein

$\rightarrow Q_{außen}$ gleichmäßig verteilt