

Felder und Wellen

WS 2013/2014

Musterlösung zur 6. Übung

15. Aufgabe

Die Entfernung eines Punktes von der Ladung wird mit r bezeichnet, daraus folgt

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Aus dem Cosinussatz für das Dreieck $qP0$ folgt

$$r^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta$$

Das durchschnittliche Potential Φ_D ist das Oberflächenintegral des Potentials über die Kugeloberfläche geteilt durch den Flächeninhalt der Kugeloberfläche.

$$\begin{aligned}\Phi_D &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta}} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R}{2z} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta}} 2zR \sin \vartheta \, d\vartheta\end{aligned}$$

Der Faktor hinter dem Inversen des Abstandes ist die Ableitung von $-2zR \cos \vartheta$. Damit ist das Integral die Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{\dots}}$.

$$\begin{aligned}\Phi_D &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4Rz} \left[2\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta} \right]_0^\pi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2zR} ((z+R) - (z-R)) \quad \text{mit } z > R \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z}\end{aligned}$$

Der Durchschnitt des Potentials auf der Kugeloberfläche ist also gerade dessen Wert im Nullpunkt. Da R beliebig klein sein kann, gilt also: Das Potential im ladungsfreien Raum ist an jedem Punkt gleich dem durchschnittlichen Potential seiner Nachbarpunkte. Bewiesen wurde das in dieser Aufgabe natürlich nur für das Punktladungspotential, dieser Satz gilt aber allgemein.

16. Aufgabe

Wegen der unendlichen Ausdehnung in z -Richtung kann nichts von z abhängen. Es handelt sich also um ein 2-dimensionales Problem. Gesucht wird die Lösung der Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

mit folgenden Randbedingungen

$$\begin{aligned}\Phi &= 0 && \text{für } y = 0 \\ \Phi &= 0 && \text{für } y = a \\ \Phi &= V_0 && \text{für } x = 0 \\ \Phi &\rightarrow 0 && \text{für } x \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Gesucht wird nach Lösungen der Form

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

Also nach Produkten aus 2 Funktionen, die jeweils nur von einer Variable abhängen. Das schränkt die Menge der möglichen Lösungen stark ein, die meisten Lösungen der Laplace-Gleichung haben nicht diese Form z.B. ist

$$\Phi(x, y) = 5x + 6y$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung, die nicht in Form eines Produkts geschrieben werden kann. Im Verlauf der Rechnung wird klar werden, daß viele Potentialprobleme trotz Einschränkung auf Produktlösungen gelöst werden können. Wenn eine Lösung gefunden wurde, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Potentiale, daß es die einzige Lösung ist. Φ in Produktform in die Laplace-Gleichung eingesetzt ergibt

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

Der nächste Schritt ist die eigentliche Variablenseparation. Die obige Gleichung wird durch $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ geteilt

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Form

$$f(x) + g(y) = 0$$

Da diese Gleichung für beliebige x und y gelten muß, folgt daß $f(x)$ und $g(y)$ einzeln konstant sein müssen, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= C_1 \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= C_2 \\ C_1 + C_2 &= 0\end{aligned}$$

C_1 und C_2 müssen also entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Deshalb wird $C_1 = k^2$ und $C_2 = -k^2$ gewählt. Also

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= k^2 X \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= -k^2 Y\end{aligned}$$

Die partielle Differentialgleichung wurde in 2 gewöhnliche Differentialgleichungen umgewandelt. Diese besitzen die bekannten Lösungen

$$\begin{aligned}X(x) &= Ae^{kx} + Be^{-kx} \\ Y(y) &= C \sin ky + D \cos ky\end{aligned}$$

$\Delta\Phi$ besitzt also folgende allgemeine Lösung

$$\Phi(x, y) = \left(Ae^{kx} + Be^{-kx} \right) (C \sin ky + D \cos ky)$$

A muß 0 sein wegen $\Phi \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

$$\Phi(x, y) = Be^{-kx} (C \sin ky + D \cos ky)$$

B ist ein konstanter Faktor der in C und D absorbiert werden kann

$$\Phi(x, y) = e^{-kx} (C \sin ky + D \cos ky)$$

an der Stelle $y = 0$ muß $\Phi = 0$ sein. $\Rightarrow D = 0$

$$\Phi(x, y) = e^{-kx} C \sin ky$$

an der Stelle $y = a$ muß $\Phi = 0$ sein. e^{-kx} kann nicht 0 werden, also muß gelten

$$\sin ka = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Die Lösung für $n=0$ kann ausgeschlossen werden, da die Lösung sonst überall identisch 0 wäre. Negative n führen nicht zu neuen Lösungen, nur die Konstanten wären vertauscht ($C \rightarrow -C, A \rightarrow B$). Die Lösung hat also folgende Form

$$\Phi(x, y) = Ce^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Diese Funktion muß die letzte Randbedingung $\Phi = V_0$ für $x = 0$ erfüllen. Hierfür wird die Linearität der Laplace-Gleichung ausgenutzt. Linearität bei Differentialgleichungen bedeutet: wenn Φ_1 und Φ_2 Lösungen der Differentialgleichung sind, ist $a\Phi_1 + b\Phi_2$ auch eine Lösung. Die gefundene Lösung hängt von einem Parameter n ab, ist in Wirklichkeit also eine ganze Lösungsmenge. Weil die Laplace-Gleichung linear ist können alle Lösungen superponiert werden

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Für $x = 0$ muß $\Phi = V_0$ sein

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Die Konstanten C_n sind im Prinzip die Fourierkoeffizienten des Potentials V_0 . Zur Berechnung der C_n werden beide Seiten mit $\sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right)$ multipliziert und von 0 bis a integriert.

$$\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy$$

Das Integral auf der rechten Seite hat folgende Lösung

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy = \begin{cases} 0, & \text{für } n' \neq n \\ \frac{a}{2}, & \text{für } n' = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy$$

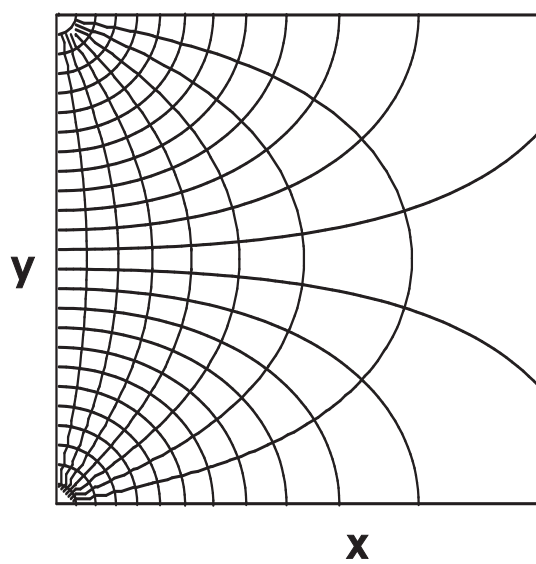
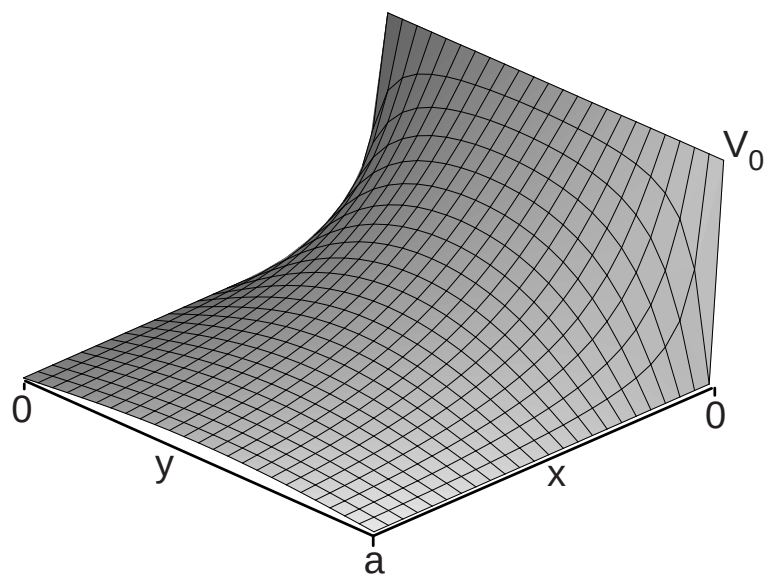
mit dieser Formel kann C_n für alle n berechnet werden.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy \\ &= \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für gerade } n \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & \text{für ungerade } n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Diese Formel liefert einen Wert $\Phi(x, y)$ für beliebige x, y in beliebiger Genauigkeit. Durch (komplizierte) algebraische Umformungen kann die Lösung auch in geschlossener Form angegeben werden (siehe J. D. Jackson: "Electrodynamics").

$$\Phi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)} \right)$$



17. Aufgabe

Das $\vec{E}$ -Feld im Hohlraum wird im lokalen, auf den Mittelpunkt des Hohlraums zentrierten Koordinatensystem berechnet. Das Potential ist im Leiter konstant, also auch auf der Oberfläche des Hohlraumes konstant. Damit ist das Potential im Hohlraum eindeutig definiert und der Hohlraum kann gesondert betrachtet werden. Eine Lösung des Problems : "Punktladung im Mittelpunkt eines kugelförmigen Hohlraumes mit konstantem Potential auf der Hohlraumoberfläche" ist:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} + C$$

Wegen der Eindeutigkeit des Potentials ist das auch die einzige Lösung. Für $r' < r_0$ folgt daraus

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{e}_{r'}$$

Im idealen Leiter muß das $\vec{E}$ -Feld 0 sein. Wird eine kugelförmige Fläche direkt unterhalb der Oberfläche der Kugel betrachtet, ist das $\vec{E}$ -Feld überall auf der Fläche gleich Null. Es gilt der Satz vom Hüllenfluß

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int \varrho dv$$

Also muß die eingeschlossene Ladung gleich Null sein. Auf der Oberfläche des Hohlraums existiert also eine Flächenladung der Gesamtstärke $-Q$. Die leitende Kugel an sich ist aber ungeladen und auf konstantem Potential. Deshalb verteilt sich die Ladung Q gleichmäßig auf der Oberfläche und erzeugt für $r > R$ ein Punktladungsfeld.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{für } r > R$$