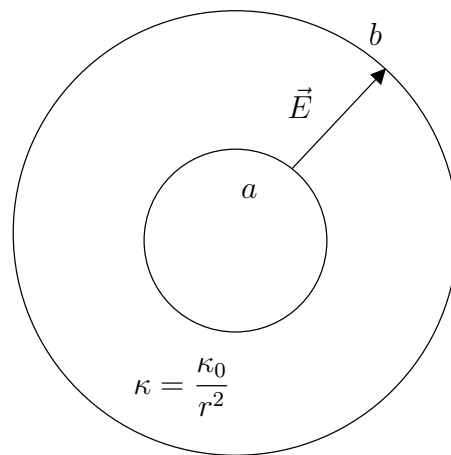


Felder und Wellen

WS 2013/2014

Musterlösung zur 8. Übung

20. Aufgabe



Die Anordnung ist kugelsymmetrisch, deshalb hängt nichts von den Winkeln ab.

- a) Ausgangspunkt der Lösung ist die Überlegung, dass der Gesamtstrom durch eine Kugelschale mit Radius r ($a < r < b$) wegen der Ladungserhaltung und aus Symmetriegründen konstant sein muss. Daraus folgt:

$$I = \int \vec{J} d\vec{f} = J_r(r) 4\pi r^2 = \text{konst.}$$
$$\Rightarrow J_r(r) = \frac{I}{4\pi r^2}, \vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

b)

$$J_r(r) = \kappa(r) E_r(r) \Rightarrow E_r(r) = \frac{J_r(r)}{\kappa(r)} = \frac{I}{4\pi r^2} \frac{r^2}{\kappa_0} = \frac{I}{4\pi \kappa_0}$$

Aus E_r lässt sich nun U berechnen:

$$U = - \int_b^a \vec{E} d\vec{s} = -E_r(a - b) = E_r(b - a) \quad (\text{Da } E_r \text{ konst.})$$
$$= \frac{I(b - a)}{4\pi \kappa_0}$$

c) Damit kann direkt der Ohmsche Widerstand berechnet werden:

$$R = \left| \frac{U}{I} \right| = \frac{(b-a)}{4\pi\kappa_0}$$

d) Die elektrische Verlustleistung:

$$P = \frac{U^2}{R} = U^2 \frac{4\pi\kappa_0}{(b-a)}$$

Die Stromdichte in abh. von U :

$$J_r = \kappa E_r = \frac{\kappa_0}{r^2} \frac{U}{b-a}$$

Die Raumladungsdichte:

$$\varrho = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \varepsilon \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r = \frac{2\varepsilon}{r} \frac{U}{b-a}$$

21. Aufgabe

a) Rechnung in Zylinderkoordinaten, wegen der Symmetrie des Problems. Das $\vec{H}$ -Feld kann mit dem Durchflutungsgesetz berechnet werden.

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{J} d\vec{f}$$

Integrationsweg: Kreis um die z -Achse. Das Wegelement in Zylinderkoordinaten ist

$$d\vec{s} = r d\varphi \vec{e}_\varphi$$

Wegen der Symmetrie hängt $\vec{H}$ nur von r ab und zeigt in $\vec{e}_\varphi$ -Richtung

$$\vec{H} = H_\varphi(r) \vec{e}_\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(r) \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi r d\varphi = \int \vec{J} d\vec{f}$$

$$2\pi r H_\varphi(r) = \int \vec{J} d\vec{f}$$

Das Problem wird in 3 Bereiche unterteilt

1. $r < a$

$$2\pi r H_\varphi(r) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{H} = 0$$

2. $a \leq r \leq b$

$$2\pi r H_\varphi(r) = I$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

3. $b < r$

$$2\pi r H_\varphi(r) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{H} = 0$$

b) Das Vektorpotential wird mit dem "Coulomb"-Integral berechnet

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$\vec{J}$ hat nur eine z -Komponente

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$\vec{A}$ wird auf der z -Achse berechnet $\Rightarrow \vec{r} = 0$. Der Strom auf dem inneren Leiter befindet sich im Abstand a von der z -Achse, der Strom auf dem äußeren Leiter im Abstand b .

$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \left(\int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} dz - \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} dz \right)$$

Die Integrale werden zuerst von $-L$ bis L berechnet, danach wird der Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ durchgeführt. Die Funktionen sind symmetrisch in z

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi} \left(\int_0^L \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} dz + \int_0^L \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} dz \right)$$

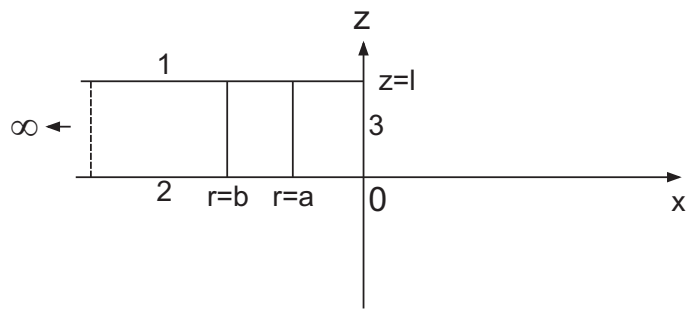
Integration mit Bronstein, Maple oder ausgezeichneten Mathekenntnissen

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu I}{2\pi} \left(\left[\ln \left(z + \sqrt{z^2 + a^2} \right) \right]_0^L - \left[\ln \left(z + \sqrt{z^2 + b^2} \right) \right]_0^L \right) \\ &= \frac{\mu I}{2\pi} \left[\ln \frac{\left(z + \sqrt{z^2 + a^2} \right)}{\left(z + \sqrt{z^2 + b^2} \right)} \right]_0^L \end{aligned}$$

Für $L \rightarrow \infty$ geht der Logarithmus gegen null.

$$\begin{aligned} A_z &= -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{a}{b} \\ &= \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \\ \vec{A} &= \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \vec{e}_z \end{aligned}$$

c) Als Integrationsfläche wird ein Rechteck in der xz -Ebene zwischen $z = 0$ und $z = l$ sowie $x = 0$ und $x = \infty$ gewählt. $\vec{B} = \mu \vec{H}$ existiert nur zwischen $x = r = a$ und $x = r = b$. $\vec{A}$ muß für $x \rightarrow \infty$ verschwinden. Die Stromdichte $\vec{J}$ hat nur eine z -Komponente, deshalb ist $\vec{A}$ orthogonal zu den Wegstücken 1 und 2, die nichts zum



Integral beitragen.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \oint \vec{A} d\vec{s} &= \int_0^l A_z dz \\ &= A_z l \\ &= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\end{aligned}$$

$\vec{H}$ steht senkrecht auf der umschlossenen Fläche und ist in z -Richtung konstant ($\vec{e}_y = \vec{e}_\varphi$ in der xz -Ebene)

$$\begin{aligned}\int \vec{B} d\vec{f} &= \int \mu H_\varphi(r) \vec{e}_\varphi d\vec{f} \\ &= l \int_0^\infty \mu H_\varphi(r) \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi dr \\ &= l \int_a^b \mu \frac{I}{2\pi r} dr \\ &= \frac{\mu I l}{2\pi} [\ln r]_a^b \\ &= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\end{aligned}$$