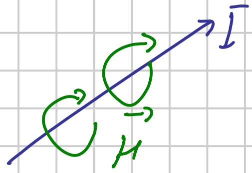
F&W Übung 9

13.1.14

Magnetostatik

allg.: $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \cancel{\dot{\vec{D}}} = 0$

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{j}\, d\vec{F}$$



Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Materie: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

Magnetisierung

bewegte Ladungen (e^- in Materie) sind Ströme $\Rightarrow$ erzeugen magn. Moment

lineare Medien $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

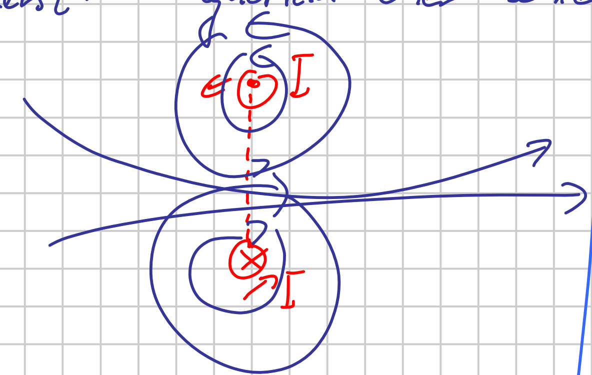
χ_m: Suszeptibilität

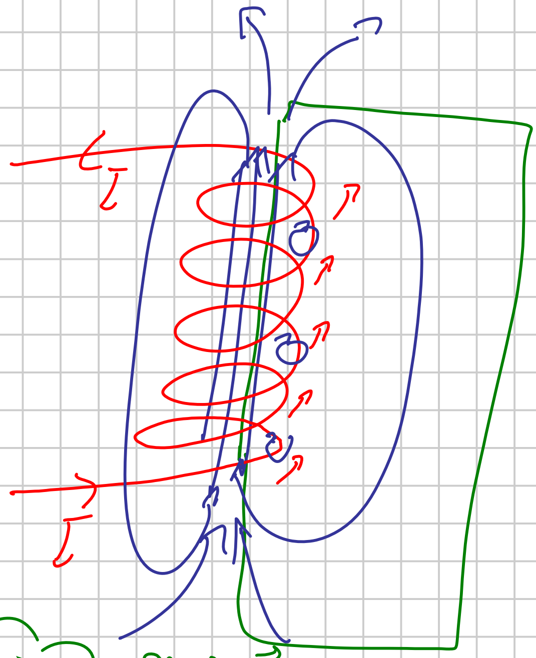
Bedingung an Grenzflächen:

$B_{n1} = B_{n2}$, $\quad H_{t1} = H_{t2}$ (wenn keine Flächenströme)

Magnetfeld einer Spule

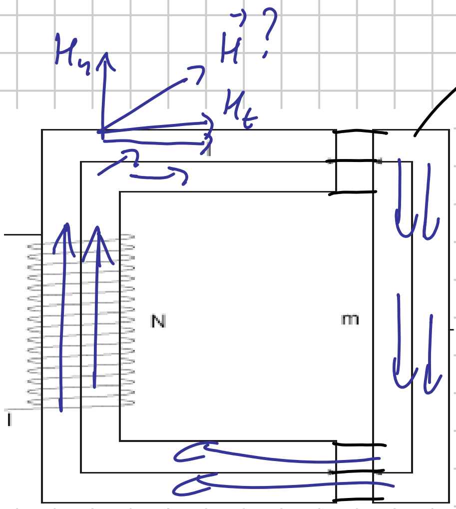
zuerst: Magnetfeld einer Schleife





$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j}\, d\vec{F} = NI$$

Materie verändert Form:



$B_{n,eisen} = B_{n,Luft}$ $\quad \mu_{r,eisen} H_{n,eisen} = H_{n,Luft}$

$$\rightarrow H_{n,eisen} = \frac{1}{\underbrace{\mu_{r,eisen}}_{\sim 1000}} H_{n,Luft} \rightarrow \text{sehr klein}$$

→ Richtung von $\vec{H}$ im Joch entlang des Jochs

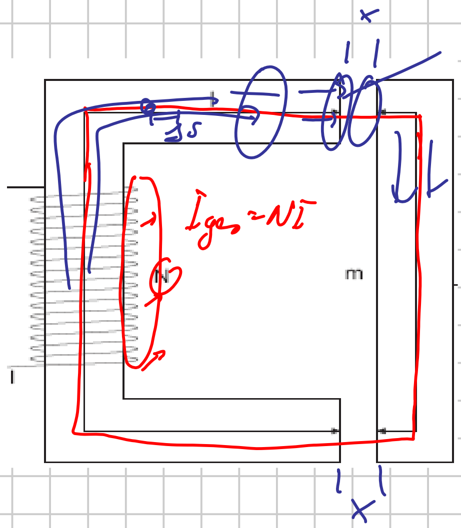
$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ → B hauptsächlich im Joch

→ Integrationsweg im Joch wählen

H innerhalb des Jochs konstant, da sich Querschnitt nicht ändert und $\text{rot}\,\vec{H} = 0$

A22 ges: $\vec{B}, \vec{H}$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \underbrace{\iint \vec{j}\, d\vec{A}}_{I_{ges} = NI}$$



$\vec{H} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot ds$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \underline{H_{eisen}} \cdot \underset{\text{Länge des Wegs im Eisen}}{l} + \underline{H_{Luft}} \cdot 2x = NI \qquad (1)$$

Wie ist das Verhältnis zwischen H_{eisen} und H_{Luft}?

An der Grenze von Eisen und Luft gilt: $H_{t1} = H_{t2}$

→ $\vec{H}$ behält die Richtung bei!

Stärke? $B_{n,eisen} = B_{n,Luft}$

$$\cancel{\mu_0} \mu_{r,eisen} H_{n,eisen} = \cancel{\mu_0} H_{n,Luft} \quad \rightarrow \quad H_{Luft} = \mu_r H_{eisen} \quad (2)$$

(2) in (1)

$$\rightarrow \quad H_{eisen} \cdot l + 2x \mu_r H_{eisen} = NI \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_{eisen} = \frac{NI}{l + 2\mu_r x}}$$

$$(2): \boxed{H_{Luft} = \frac{\mu_r NI}{l + 2\mu_r x}}$$

$$\boxed{B_{eisen} = B_{Luft} = \mu_0 H_{Luft} = \mu_0 \mu_r H_{eisen} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2\mu_r x}}$$

b) ges: 1.) $W_m(I, x)$, 2.) $W_m(\Phi, x)$

magn. Fluss

$$W_m = \underbrace{\iiint w_m \, dv}_{\text{Energiedichte} \times \text{Volumen}} = w_{m,eisen} \cdot V_{eisen} + w_{m,Luft} \cdot V_{Luft}$$

Spalt

Querschnittsfläche

$$w_{m,eisen} = \frac{1}{2} B H_{eisen} \qquad V_{eisen} = \underline{l} \cdot A$$

$$w_{m,Luft} = \frac{1}{2} B H_{Luft} \qquad V_{Luft} = 2x \cdot A$$

$$\underline{W_m} = \frac{1}{2} B \left(H_{eisen} \underline{V_{eisen}} + \underbrace{H_{Luft}}_{\underline{\mu_r H_{eisen}}} V_{Luft} \right) = \frac{1}{2} B A H_{eisen} (l + \mu_r 2x)$$

$$= \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \left(\frac{NI}{l + 2\mu_r x} \right)^2 (l + \mu_r 2x) = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{(NI)^2}{l + 2\mu_r x} \quad (*)$$

$$= W_m(I, x)$$

Bei konstantem Strom I nimmt die Energie im Feld ab, wenn x steigt.

$W_m(\Phi, x)$?

$$\Phi = \iint \vec{B}\, d\vec{A} = B \cdot A = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l + 2\mu_r x} \cdot A \Rightarrow I = \frac{\Phi \cdot (l + 2\mu_r x)}{\mu_0 \mu_r N A}$$

I in ⊛ einsetzen:
$$W_m = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{\cancel{N^2}\left(\frac{\Phi(l+2\mu_r x)}{\mu_0 \mu_r \cancel{N} A}\right)^2}{l + 2\mu_r x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{A \mu_0 \mu_r} (l + 2\mu_r x)\, \Phi^2$$

Bei konstantem Fluss nimmt die magn. Feldenergie zu, wenn x steigt!

c) ges: Kraft auf Last

Laut Aufgabe:

konst. Strom	konst. Fluss
$F = \frac{\partial W_m}{\partial x}$	$F = \frac{-\partial W_m}{\partial x}$
$F = \frac{\partial W_m(I, x)}{\partial x} = -\frac{1}{\cancel{2}} A \mu_0 \mu_r^2 (NI)^2 \frac{\cancel{2\mu_r}}{(l+2\mu_r x)^2}$	$F = -\frac{\partial W_m(\Phi, x)}{\partial x} = -\frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{A \mu_0 \cancel{\mu_r}} \cdot \cancel{2\mu_r}\, \Phi^2$
	$= -\frac{1}{\mu_0 A} \left(\frac{\mu_0 \mu_r A N I}{l + 2\mu_r x}\right)^2$
	$= -A \mu_0 \mu_r^2 (NI)^2 \frac{1}{(l + 2\mu_r x)^2}$

$\longleftrightarrow$

identisch!

Grund: Kraft natürlich nur von aktuellem Strom I bzw. dazugehörigen Fluss Φ_m abh., nicht abh. davon, ob nach einer kleinen Änderung ∂x der Fluss oder Strom konstant bleiben!

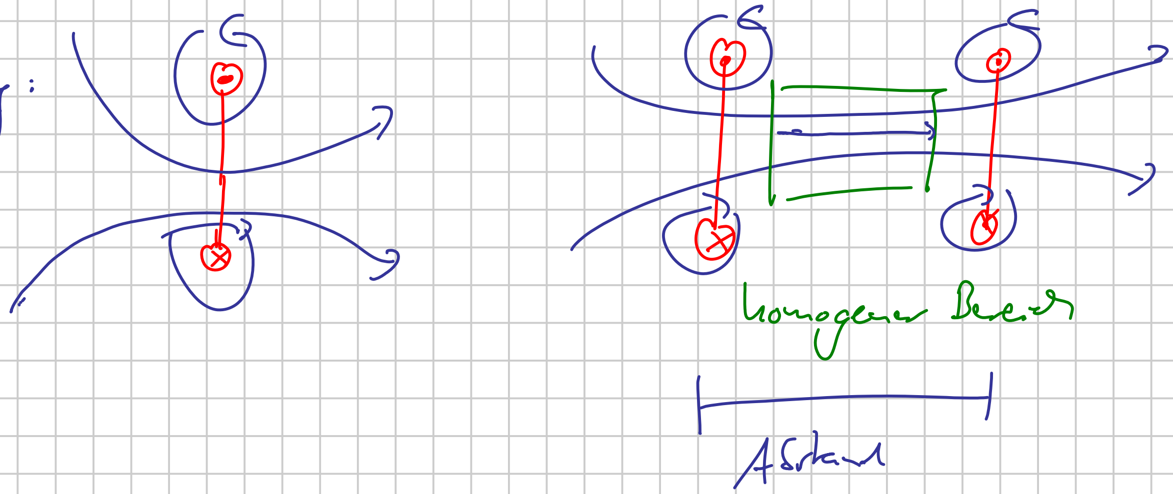
Richtung der Kraft: entlang der neg. x-Achse → Last wird angezogen!

Bei konst. Fluss: mech. Energie $\leftrightarrow$ magnetische Feldenergie

Bei konst. Strom: zusätzlich Energieaustausch mit Quelle, s. nächste Lösung

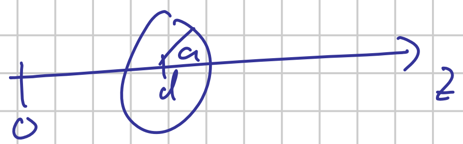
A23

Vorüberlegung:



Frage: wie groß sollte der Abstand für ein möglichst homogenes Feld sein?

a) Berechnung von $\vec{B}$ auf z-Achse einer einzelnen Spule bei $z=d$



Wie kann man $\vec{B}$ berechnen?

- $\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{j}\, d\vec{A}$ — kein sinnvoller Integrationsweg
- Gesetz von Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, dV'$$

Im Prinzip möglich. einfacher:

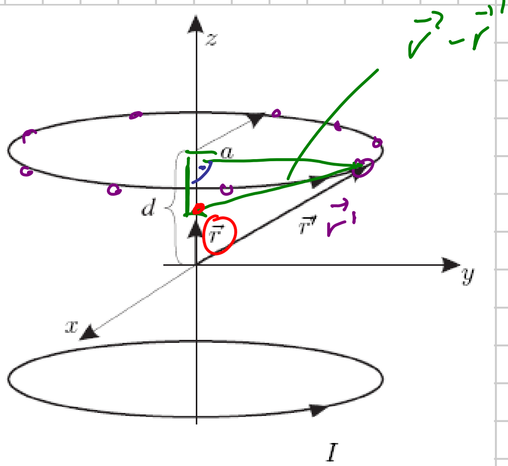
- Gesetz von Biot-Savart für Linienleiter

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r}$: Ort der Flussdichte

$\vec{r}\,'$: Ort des Stroms

$\rightarrow$ alle benötigten Größen bekannt



$$\vec r = z\,\vec e_z$$

$$\vec r' = d\,\vec e_z + a\,\vec e_R + \varphi'\,\vec e_\varphi$$

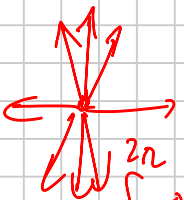
$$\Rightarrow \vec r - \vec r' = (z-d)\,\vec e_z - a\,\vec e_R - \varphi'\,\vec e_\varphi$$

$$|\vec r - \vec r'| = \sqrt{(z-d)^2 + a^2}$$

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu I}{4\pi}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a\cdot d\varphi'\cdot \vec e_\varphi \times \left((z-d)\,\vec e_z - a\,\vec e_R - \varphi'\,\vec e_\varphi\right)}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{d\vec s' = a\,d\varphi\,\vec e_\varphi}$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{\overbrace{a(z-d)\,\vec e_R}^{\int \dots \vec e_R\, d\varphi' = 0} + a^2\vec e_z}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}}\,d\varphi' \qquad \vec e_R(\varphi')$$



$$\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \vec e_R\, d\varphi' = \vec 0$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a^2\vec e_z}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}}\,d\varphi' = \cancel{2\pi}\cdot\frac{\mu I}{\cancel{4\pi}\cdot 2}\cdot\frac{a^2\vec e_z}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$= \vec B_{z1}(z)$$

b) Feld des Spulenpaars: $\vec B_z(z) = \vec B_{z1}(z) + \vec B_{z2}(z)$ $\quad B_{z2} \stackrel{!}{=} B_{z1}$ aber „d" $\to$ „$-d$"

$$= \left(\frac{\mu I}{2}a^2\frac{1}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}} + \frac{\mu I a^2}{2}\frac{1}{\left((z+d)^2+a^2\right)^{3/2}}\right)\cdot\vec e_z$$

$$= \frac{\mu I a^2}{2}\left(\frac{1}{\left((z-d)^2+a^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((z+d)^2+a^2\right)^{3/2}}\right)\vec e_z$$

c) ges: Ableitung („Änderungsrate") von B entlang der z-Achse

$$\frac{\partial B(z)}{\partial z} = ? \qquad \left(\frac{1}{((z-d)^2+a^2)^{3/2}}\right)' = \left(\left((z-d)^2+a^2\right)^{-3/2}\right)' = -\frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(z-d)}{((z-d)^2+a^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\mu I a^2 \left(\frac{-3(z-d)}{((z-d)^2+a^2)^{5/2}} - \frac{3(z+d)}{((z+d)^2+a^2)^{5/2}}\right)$$

Ableitung an $z=0$ $\quad \frac{\partial B}{\partial z}(z=0) = \frac{1}{2}\mu I a^2 \underbrace{\left(\frac{+3d}{(d^2+a^2)^{5/2}} - \frac{3d}{(\ldots)^{5/2}}\right)}_{=0}$

$$= 0$$

→ erste Ableitung immer null!

→ d kann so eingestellt werden, dass zudem noch $\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}(z=0) = 0$

d) ...

$\Rightarrow d = \frac{1}{2} a$