F&W Übung 10 20.01.2014

Induktion

Wir kennen das Durchflutungsgesetz: $\oint H\, d\vec{s} = \iint \vec{j}\, d\vec{f}$
(wenn $\dot{\vec{D}} = 0$)

Maxwell: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ → zeitliche Änderung der magn. Flussdichte führt zu elektrischem Wirbelfeld

$$U_{ind} = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\iint \vec{B}\, d\vec{f}}_{\Phi_m} = -\frac{d}{dt} \Phi_m$$

induzierte Spannung

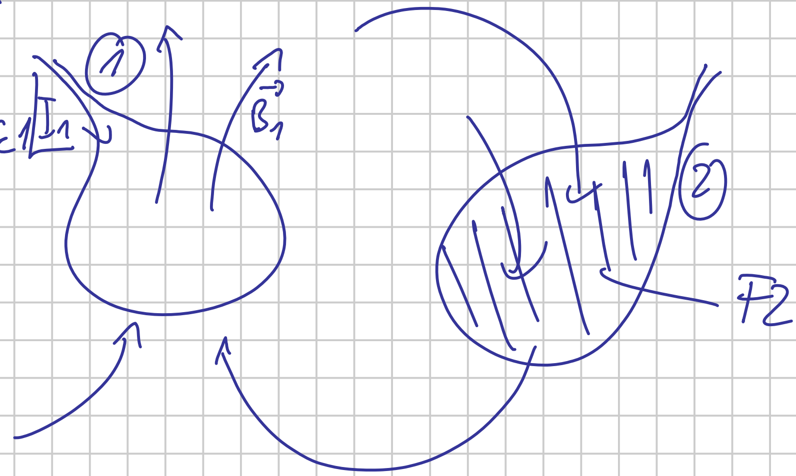
zeitl. Änderung des magn. Flusses

führt zu

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Bsp: 2 Leiterschleifen

Die vom Strom I_1 in Schleife 1 verursachte Flussdichte $\vec{B}_1$ führt zu einem Fluss Φ_{m12} in Schleife 2



$$\Phi_{m12} = \iint_{F_2} \vec{B}_1\, d\vec{f}$$

$$= L_{12} \cdot I_1 \quad (\sim I_1 !)$$

$$U_{ind,2} = -\dot{\Phi}_{m12} \quad (N_2 = 1)$$

Änderung verursacht durch
- Änderung des Stroms
- Änderung der Fläche (Drehen, Schieben, Biegen ...)

L_{12}: Gegeninduktivität zwischen den Schleifen 1/2
$L_{12} = L_{21}$

$$\Phi_{m11} = \iint_{F_1} \vec{B}_1 \, d\vec{f} = L_{11} I_1$$

L_{11}, L_{22}: Selbstinduktivitäten der Schleifen

Zusammenhang zwischen Induktivitäten und der Feldenergie:

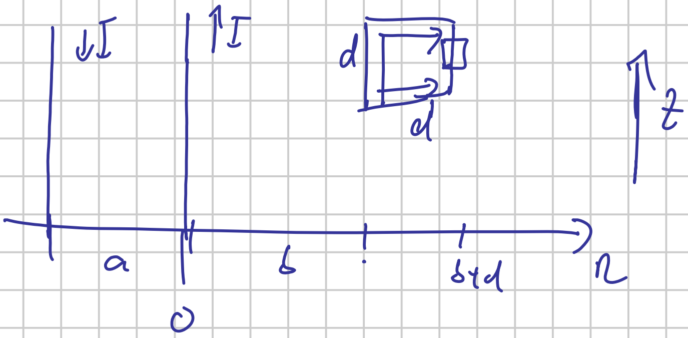
$$W_m = \iiint w_m \, dv, \quad w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}$$

1 Leiter: $W_m = \frac{1}{2} \underline{L} I^2$, N Leiter: $W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} L_{ik} I_i I_k$

vgl. Kondensator

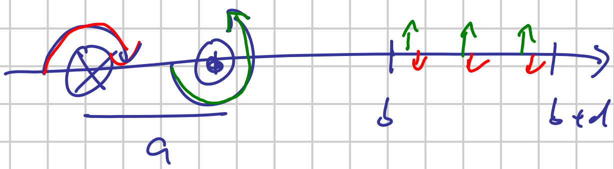
$$W_{el} = \frac{1}{2} \underline{C} U^2$$

A24)



gesucht: Φ_m durch Leiterschleife

„von oben"



$\vec{H} \perp$ Leiterschleife

$\vec{B} \perp$ "

a) $$\Phi_m = \iint \vec{B} \, d\vec{f} = \mu \iint \vec{H} \, d\vec{f} = \mu \iint (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \, d\vec{f}$$

$$\oint \vec{H}_1 \, d\vec{s} = \iint \vec{J} \, d\vec{f} \qquad 2\pi r_1 H_1 = -I \rightarrow H_1 = \frac{-I}{2\pi r_1}$$

$$\oint \vec{H}_2 \, d\vec{s} = \iint \vec{J} \, d\vec{f} \qquad 2\pi r_2 H_2 = I \rightarrow H_2 = \frac{I}{2\pi r_2}$$

Wähle $r_2 = r \rightarrow r_1 = r + a$

$$\rightarrow H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi} \left(-\frac{1}{r+a} + \frac{1}{r} \right)$$ (Feldstärke in der Schleife!)

$$\underline{\Phi_m} = \mu \int_{R=b}^{b+d} \int_{z=0}^{d} \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right) dz\, dR = d \cdot \frac{\mu I}{2\pi} \int_b^{b+d} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right) dR$$

$$\underline{\Phi_m} = \mu d \frac{I}{2\pi} \Big[\underbrace{\ln R - \ln(R+a)}_{\ln\left(R/R+a\right)}\Big]_b^{b+d} = \underline{\mu d \frac{I}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{b+d}{b+d+a}\right) - \ln\left(\frac{b}{a+b}\right)\right)}$$

b) $I = I_0 \sin\omega t$ in den Drähten

ges: $I_{ind}(t)$ in der Schleife

Woher kommt der Strom?

$$\dot{I}_{\text{Drähte}} \rightarrow \dot{\vec{B}} \text{ im Raum} \rightarrow \underline{\dot{\Phi}_{m\,\text{Schleife}}} \rightarrow \underline{U_{ind}} \leftrightarrow \underline{I_{ind}} = \frac{U_{ind}}{R_0}$$

$$I_{ind}(t) = \frac{U_{ind}(t)}{R_0} = \frac{-\dot{\Phi}_m}{R_0}$$

$$\dot{\Phi}_m = \frac{d}{dt}\Phi_m = \mu d \frac{\dot{I}(t)}{2\pi}\left(\ln(\ldots) - \ln(\ldots)\right)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt}\left(I_0 \sin(\omega t)\right) = I_0 \cdot \omega \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \underline{I_{ind}(t)} = -\frac{1}{R_0} \mu d \frac{I_0 \omega \cos\omega t}{2\pi}\left(\ln(\ldots) - \ln(\ldots)\right)$$

c) Leiterschleife bewegt sich: $b = vt$

Es gilt wieder: $I_{ind}(t) = \dfrac{-\dot{\Phi}_m(t)}{R_0}$

$$\underline{\dot{\Phi}_m} = \mu d \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\Big(I(t) \cdot \big(\ln(vt+d) - \ln(vt+a+d) - \ln(vt) + \ln(vt+a)\big)\Big)$$

Anteil wegen zeitlich veränderlichen Stroms

$$= \mu d \frac{1}{2\pi}\left(\dot{I}(t) \cdot \left(\ln(\ldots) - \ln(\ldots) + \ldots - \ldots\right) + I(t) \cdot v \cdot \left(\frac{1}{vt+d} - \frac{1}{vt+a+d} - \frac{1}{vt} + \frac{1}{vt+a}\right)\right)$$

Anteil $\sim v$ (wegen Bewegung)

$\boxed{A25}$ ges: Selbstinduktionskoeffizient pro Längeneinheit

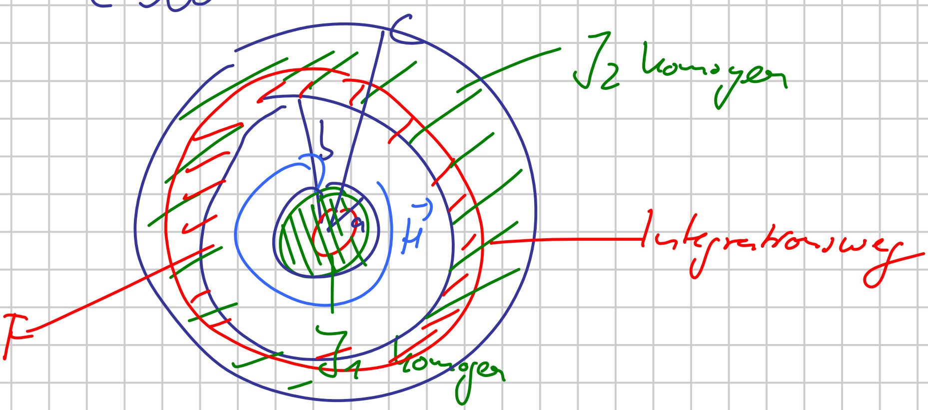
$W_m = \frac{1}{2} L I^2$ wäre in ges Raum unendlich

$\frac{W_m}{l} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{L}{l}\right)}_{\text{gesucht}} I^2 \quad \Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{W_m}{l} \cdot 2 / I^2$

$\rightarrow$ Berechne $\frac{W_m}{l} = \frac{1}{l} \iiint w_m \, dv \qquad w_m = \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} = \frac{1}{2} \mu H^2$

$\vec{H} = ?$

$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint_F \vec{J} d\vec{s}$



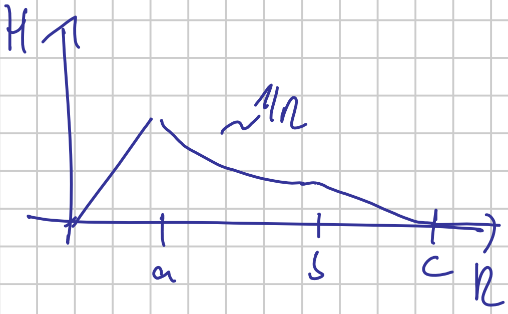
weil homogen verteilt

$\Rightarrow \vec{I} = \iint \vec{J} df = A \cdot \vec{J} \Rightarrow \pi a^2 \cdot \vec{J}_1 = I \vec{e}_z \rightarrow \vec{J}_1 = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$

$(\pi c^2 - \pi b^2) \vec{J}_2 = -I \vec{e}_z \rightarrow \vec{J}_2 = \frac{-I \vec{e}_z}{\pi c^2 - \pi b^2}$

$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j} d\vec{f} \quad \Rightarrow$ für $R < a$: $2\pi R H = \pi R^2 \cdot J_1 = \frac{R^2}{a^2} I$

$\Rightarrow H = \frac{I R}{2\pi a^2} \quad (1)$



Für $a < R < b$: $2\pi R H = I \rightarrow H = \frac{I}{2\pi R} \quad (2)$

Für $b < R < c$: $2\pi R H = I + J_2 (\pi R^2 - \pi b^2)$

$$= I + \frac{-I\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}(c^2-b^2)}(r^2-b^2)$$

$$\rightarrow H = I\left(1 - \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\frac{1}{2\pi r} \quad (3)$$

Für $r > c$: $H = 0$

$$\frac{W_m}{l} = \frac{1}{l}\iiint w_m \, dV = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\int_0^{\infty} \frac{1}{2}\mu H^2(r)\, r\, dr\, dz\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\cancel{l}}\, 2\pi \cdot \cancel{l} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\mu \int_0^{\infty} H(r)^2\, r\, dr$$

$$= \mu\pi \left(\int_0^{a} H(r)^2\, r\, dr + \int_a^{b} H(r)^2\, r\, dr + \int_b^{c} H^2(r)\, dr + \underbrace{\int_c^{\infty} H(r)^2\, r\, dr}_{H=0 \rightarrow \int .. = 0} \right)$$

(1)

$$\int_0^{a} \left(\frac{Ir}{2\pi a^2}\right)^2 r\, dr = \frac{I^2}{(2\pi a^2)^2}\left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^a = \frac{I^2}{4\pi^2 \cancel{a^4}} \cdot \frac{1}{4}\cancel{a^4} = \frac{I^2}{16\pi^2}$$

$$\int(2) \quad \int_a^{b} \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 r\, dr = \frac{I^2}{4\pi^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\int(3)$$

$$\int_b^{c} I^2\left(1 - \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)^2 \left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2 \cdot r\, dr = \ldots \quad \text{s. MuLö}$$

$$\Rightarrow L/l = \frac{W_m}{l} \cdot \frac{2}{I^2} = \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a} + C\right)$$

A26 a) ges: L_{aa}, L_{ss} (Selbstinduktionskoeff.)

$L_{as} = L_{sa}$ (Gegeninduktionskoeff.)

$$n\Phi_{maa} = L_{aa} I_a \qquad \Phi_{maa} = \iint_{F_a} \vec{B}_a \, d\vec{f} \qquad \vec{B} = ?$$

Lange Spule: $H \cdot l = nI$

(Skript 5.6) $\Rightarrow B_a = \mu_0 \frac{nI_a}{l}$

$$B_s = \mu_0 \frac{mI_s}{l}$$

$$= \underbrace{\pi R_a^2}_{\text{Fläche von Spule A}} \cdot \underbrace{\mu_0 \frac{nI_a}{l}}_{\text{B von Spule A}}$$

$$L_{aa} = \frac{n\Phi_{maa}}{I_a} = \frac{n^2}{l} \mu_0 \pi R_a^2$$

L_{ss} analog: $L_{ss} = \frac{m\Phi_{ss}}{I_s} = \frac{m^2}{l} \mu_0 \pi R_s^2$

$$\underbrace{\Phi_{mas}}_{\text{von A erzeugt, in B}} = B_a \cdot F_s = \mu_0 \frac{nI_a}{l} \cdot \pi R_s^2$$

$$m\Phi_{as} = L_{as} I_a \Rightarrow L_{as} = \mu_0 \frac{nm}{l} \pi R_s^2$$

oder: $\Phi_{msa} = B_s \cdot F_s = \mu_0 \frac{mI_s}{l} \cdot \pi R_s^2$

$$n\Phi_{msa} = L_{sa} I_a \Rightarrow L_{sa} = \mu_0 \frac{nm}{l} \pi R_s^2$$

$\Rightarrow L_{as} = L_{sa}$

b) Wechselspannung an Spule A. $I_s = 0$ $\qquad U_s = ?$

Laut Aufg. gilt:

$$U_a = -L_{aa} \dot{I}_a - \cancel{L_{as} \dot{I}_s} \qquad \dot{I}_s = 0 \quad \text{da } I_s = 0$$

$$U_s = -L_{as}\dot{I}_a - \cancel{L_{ss}\dot{I}_s}$$

$$\frac{U_a}{U_s} = \frac{L_{aa}}{L_{as}} \qquad U_s = \frac{L_{as}}{L_{aa}} U_a = \frac{m}{n}\frac{R_s^2}{R_a^2} U_a$$

c) $U_s = \frac{m}{n} U_a$