Felder und Wellen Übung 13

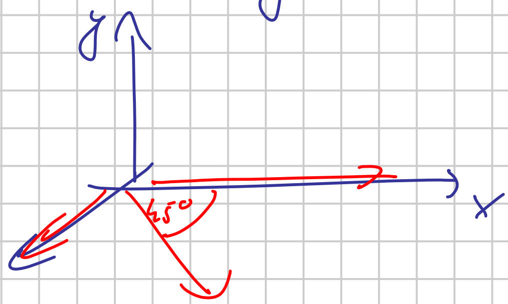
10.02.14

Ebene Wellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung

Bisher: Ebene Welle entlang Koordinatenachsen

z.B. entlang z: $\vec{E} = \vec{E}(z,t) = E_0\, e^{i(\omega t - kz)}\, \vec{e}_y$

entlang x: $\vec{E} = \vec{E}(x,t) = E_0\, e^{i(\omega t - kx)}\, \vec{e}_z$



Wie kann man die Welle beschreiben, die in Richtung

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_z\right) \quad \text{läuft?}$$

1.) Koordinatentransformation

→ hilft bei Reflexion nicht

2.) Vektorielle Wellenzahl $\vec{k}$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Welle in z-Richtung: $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = k \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = k \cdot z \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z = k \cdot z$

x-Richtung: $\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \vec{e}_x \Rightarrow \vec{k}\vec{r} = kx\, \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = k \cdot x$

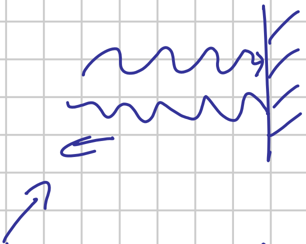
in $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_z\right)$-Richtung: $\vec{k} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_z\right)$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = \frac{k}{\sqrt{2}}\Big(x\underbrace{\vec{e}_x\vec{e}_x}_{=1} + z\underbrace{\vec{e}_z\vec{e}_z}_{=1}\Big) = \frac{k}{\sqrt{2}}(x+z)$$

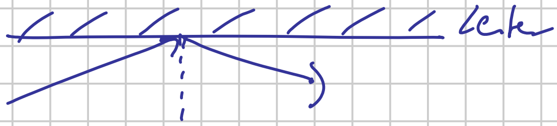
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{i(\omega t - k/\sqrt{2}(x+z))}$$

Hohlleiter, TM-/TE-Wellen

• Wellen werden an idealen Leitern vollständig reflektiert (s. A30)



Überlagerung: stehende Welle mit Schwingungsknoten und -bäuchen



• Was geschieht im Hohlleiter?

• die Wellenausbreitung im Hohlleiter lässt sich als Überlagerung von ebenen Wellen beschreiben, die an den Wänden reflektiert werden. Die entstehende Welle breitet sich in z-Richtung aus, und verhält sich senkrecht dazu wie eine stehende Welle

• TM-Wellen: Transversal-Magnetisch → hat $H_z = 0$
(Ausbreitungsrichtung z) aber longitudinales $E_z \neq 0$

TE-Wellen: Transversal-Elektrisch → hat $E_z = 0$
aber longitudinales $H_z \neq 0$

• Berechnung für rechteckige Hohlleiter
  - • Wellengleichung für TE/TM-Wellen aufstellen
    - ohne Verluste
    - harmonischer Ansatz
    - $H_z/E_z = 0$
  - • betrachte nur z-Komponente der Wellengleichung

- Separation der Variablen wie bei Laplace-Glg für Φ
- Randbedingung: $E_{tan} = 0$ am leitenden Rand
- aus E_z bzw. H_z können die anderen Größen berechnet werden

Skript 9.6.3/9.6.4

s. A32

A31 Bisher: Welle trifft senkrecht auf Medium

(ges: Amplituden von rücklaufenden und transmittierten Wellen)

Jetzt: Einfallswinkel $\Phi_e \neq 0$

ges: Amplituden und Winkel der rücklaufenden und transmittierten Welle

neu: Phänomen der „Totalreflexion"

a) Betrachte $\vec{r} = x\vec{e}_x$ (Ort auf Grenzfläche)

ges: Φ_r, Φ_d

Ansatz: Stetigkeitsbedingung des $\vec{E}$-Feldes: $E_{t1} = E_{t2}$

$\vec{E}$-Feld zeigt in y-Richtung $\Rightarrow$ komplettes $\vec{E}$-Feld (E_y) zeigt tangential

$$E_{e,y} + E_{r,y} = E_{d,y} \Rightarrow E_e e^{i(\omega t - \vec{k}_e \vec{r})} + E_r e^{i(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})} = E_d e^{i(\omega t - \vec{k}_d \vec{r})}$$

$t = 0$, $\vec{r} = x\vec{e}_x$

$$\Rightarrow E_e e^{-ik_1 \sin\Phi_e x} + E_r e^{-ik_1 \sin\Phi_r x} = E_d e^{-ik_2 \sin\Phi_d x}$$

$$A e^{D_1 x} + B e^{D_2 x} = C e^{D_3 x}$$

nur lösbar, wenn $\underline{D_1 = D_2 = D_3}$ $\rightarrow (A+B) e^{D_1 x} = C e^{D_1 x}$

$\rightarrow A + B = C \rightarrow E_e + E_r = E_d$

aus $D_1 = D_2 \Rightarrow -ik_1 \sin\Phi_e = -ik_1 \sin\Phi_r \Rightarrow \boxed{\Phi_e = \Phi_r}$

$D_1 = D_3 \Rightarrow -ik_1 \sin\Phi_e = -ik_2 \sin\Phi_D$

$$\Rightarrow \sin\Phi_d = \frac{k_1}{k_2} \sin\Phi_e$$

$$\boxed{\Phi_d = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_2} \sin\Phi_e\right)}$$

b) ges: $\vec{H} = \frac{1}{\Gamma}\vec{e}_k \times \vec{E}$, $\quad \vec{E} = E\vec{e}_y$

Für einfallende und transmittierte Welle gilt: $\vec{e}_k = \cos\Phi\,\vec{e}_z + \sin\Phi\,\vec{e}_x$

$$\rightarrow \vec{H}_{e/d} = \frac{1}{\Gamma} E \cdot \left(\cos\Phi\,\vec{e}_z + \sin\Phi\,\vec{e}_x\right) \times \vec{e}_y$$

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$

$$= \frac{1}{\Gamma} E\left(-\cos\Phi\,\vec{e}_x + \sin\Phi\,\vec{e}_z\right)$$

Für reflektierte Welle: $\vec{e}_k = -\cos(\Phi_r)\,\vec{e}_z + \sin\Phi_r\,\vec{e}_x$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{\Gamma_1} E_r\left(+\cos\Phi_r\,\vec{e}_x + \sin\Phi_r\,\vec{e}_z\right)$$

c) ges: E_d, E_r

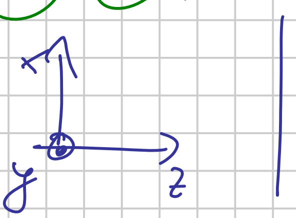
Ansatz: Stetigkeitsbedingungen für $\vec{E}$ und $\vec{H}$

$E_{t1} = E_{t2}$ s.a!

$H_{t1} = H_{t2}$

Aus a) $E_e + E_r = E_d$

$H_{t1} = H_{t2}$



nur x-Komponente von H ist tangential ($H_t = H_x$)

$$\frac{E_e}{\Gamma_1}\left(-\cos(\Phi_d)\right) + \frac{E_r}{\Gamma_1}\cos\Phi_r = \frac{E_d}{\Gamma_2}\left(-\cos\Phi_d\right)$$

$\rightarrow$ 2 Unbekannte, 2 Gleichungen

$$\Rightarrow E_r = \frac{\Gamma_2\cos\Phi_e - \Gamma_1\cos\Phi_d}{\Gamma_2\cos\Phi_e + \Gamma_1\cos\Phi_d}\,E_e$$

$$E_d = \frac{2\,\Gamma_2\cos\Phi_e}{\Gamma_1\cos\Phi_d + \Gamma_2\cos\Phi_e}\,E_e$$

d) Glg. aus a) $\sin\Phi_d = \frac{k_1}{k_2}\sin\Phi_e \le 1$ dann Lösung für Φ_d

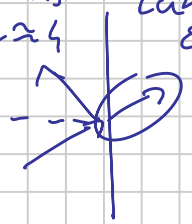
$$\sin\Phi_e \le \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu}}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} > 1$$

→ immer eine Lösung für Θ_d

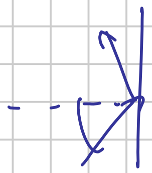
Wenn $n_1 > n_2$ $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$, dann wäre

$$\Theta_{c,\text{kritisch}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)$$

Bsp: Glas $\varepsilon_r \approx 4$ Luft $\varepsilon_r = 1$



aber



100 % Reflexion

$$\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = 30°$$

$\Theta_e < \Theta_{c,\text{kritisch}}$ $\Theta_e > \Theta_{c,\text{kritisch}}$

A32) a) $\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ $\frac{d}{dt}(..) = j\omega\cdot(..)$

$$\xrightarrow{FS} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial y} = 0$, da Anordnung in y-Richtung unendlich ausgedehnt

longitudinale Komponente:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2\mu\varepsilon E_z = 0$$

Lösung der DGL? Ansatz wie bei Laplace-Glg. für Φ in ÜG/Ü7

$$E_z(x,y,z,t) = U(x)\cancel{V(y)}\cdot W(z,t)$$ Separationsansatz (Ausbreitungsrichtung z)

dabei: $W(z,t) := e^{j(\omega t - k_z z)}$ (harmonischer Ansatz)

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\underline{e^{j(\omega t - k_z z)}}(+jk_z)(+jk_z)\underline{U(x)}$$

$$= -k_z^2 E_z$$

$$\frac{\partial^2 U(x) W(z,t)}{\partial x^2} + \underbrace{(-k_z^2 E_z) + \omega^2 \mu\varepsilon E_z}_{(\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)\, U(x)\, W(z,t)} = 0 \qquad \Big| : U(x) \quad : W(z,t) \quad (: V(y))$$

$$\underbrace{\frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}}_{f(x)} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{V(y)}\frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2}}_{=0}}_{g(y)} + \underbrace{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}_{\text{const.}} = 0$$

$\Rightarrow k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$

$\rightarrow$ $f(x)$ muss konstant sein $= -k_x^2$ $\qquad \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = -k_x^2$

Lösung von $U(x)$ s. ÜG/7 oder Skript

$\Rightarrow U(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$

$\Rightarrow E_z = (A \underline{\sin(k_x x)} + B \cos(k_x x))\, e^{j(\omega t - k_z z)}$

Randbedingungen: $E_{tan} = 0$ am Rand $\Rightarrow E_z = 0$ am Rand

$E_z(x=0) = E_z(x=a) = 0$

$E_z = B \cdot e^{j(\omega t - k_z z)} \Rightarrow B = 0$

$E_z = \underset{\neq 0}{A} \sin(k_x a)\, \underbrace{e^{j(\ldots)}}_{\neq 0}$

$\Rightarrow \sin(k_x a) = 0 = k_x a = n\pi \rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$\rightarrow E_z = \ldots$