

FLW Übung 14

14.02.19

Fortschritt A32

a) ges: \vec{E} und \vec{H}

Vorgehen: Wellengleichung für E_z (da TM-Wellen, d.h. $H_z = 0$)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) E_z = 0$$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$ wegen unendlicher Ausdehnung in y

Separationsansatz: $E_z(x, z, t) = U(x) \cdot W(z, t)$

Wellenausatz: $W(z, t) = e^{i(\omega t - k_z z)}$

(ansetzen, lösen, s. letzte ÜS-g, vgl. Laplace-Gly.)

$$U(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \in \mathbb{N}$$

Randbedingungen

$E_{\text{tan}} = 0$ am Rand

$$\Rightarrow B = 0, \quad k_x = \frac{n\pi}{a}$$

Plattenabstand

$$\Rightarrow E_z(x, z, t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad n = 1, 2, \dots$$

Mit Skript 9.6.3 $\Rightarrow E_x = \frac{-i k_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} = \frac{-i k_z}{k_x^2} \cdot A \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot \frac{n\pi}{a} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}$

$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

$$E_y = \frac{-i k_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{da } E_z \\ \text{keine } y\text{-Abh.} \end{array} \right)$$

$$H_x = \dots \cdot \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} = 0$$

$$H_y = \frac{-i \omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} = \frac{-i \omega \epsilon}{k_x} A \cdot \cos(\dots) e^{i(\dots)}$$

$H_z = 0$ da TM-Welle

verschiedene Lösungen für $n=1, 2, \dots \Rightarrow$ „Moden“

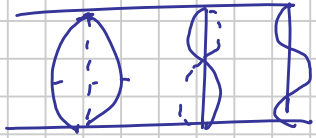
b) ges. k_z aus a) $\Rightarrow k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_x^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$

Wichtig: 1.) A und ω werden von außen vorgegeben.

n kann bel. Wert annehmen. Tatsächlich

ergibt sich eine Überlagerung aus all diesen Moden.

Jeder Mode hat ein anderes k_x und k_z
(da diese abh. von n sind!)



Im Rechteckhohlleiter werden die Moden durch zwei Zahlen n, m beschrieben (nicht nur ein n !)
Unterschiedliche Moden haben unterschiedliche Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

2.) Wellenausbreitung nur für k_z reell möglich!

sonst $E_z \sim e^{i\omega t} \cdot e^{-k_z z}$

Dämpf



$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \stackrel{!}{=} \text{reell} \rightarrow \omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \omega > \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left(\frac{n\pi}{a}\right)$$

\Rightarrow Der Mode $n=1$ kann sich ausbreiten, wenn

$$\omega > \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \cdot \frac{\pi}{a}$$

- cut-off-Frequenz

Mode $n=2$: $\omega > \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{2\pi}{a}$

\Rightarrow Für ein bestimmtes ω können sich nur eine begrenzte Zahl von Moden ausbreiten!

$$\omega_{\text{max}} = \text{kleinste cut-off-Frequenz} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\pi}{a}$$

$$\text{Bsp: } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v c_0}{2a}; a = 3 \text{ cm} \quad c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow f = 5 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 5 \text{ GHz}$$

c) ges: Phasengeschwindigkeit (wie schnell ändert sich ein Ort gleicher Phase)

$$c = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} = \dots = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c_0}{\omega a}\right)^2}} > c_0$$

\uparrow ω von oben
 \downarrow $1/c_0^2$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{< 1}$
 \uparrow c_0
 Vakuum-Lichtgeschw.

ges: Gruppengeschwindigkeit (wie schnell breitet sich Energie / Info. aus?)

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} \cdot 2\omega \mu\epsilon}$$

$$= \frac{\sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}{\omega \mu\epsilon} = \dots = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c_0}{\omega a}\right)^2} < c_0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{< 1}$

Die Phasengeschwindigkeit kann schneller sein als die Gruppengeschwindigkeit. Sie gibt nur an, wie schnell sich das Interferenzmuster ändert. Die Gruppengeschw. gibt an, wie schnell Energie oder Information übertragen wird.

$$d) \vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ (E_x \vec{e}_x + E_z \vec{e}_z) \times H_y^* \vec{e}_y \}$$

$$= \text{s. Mult.} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \underbrace{H_1 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}_{\vec{e}_z} + \underbrace{j H_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos(\dots)}_{\vec{e}_x} \right\}$$

$H_e \rightarrow$ Energie wird
in z -Richtung
transportiert

Im: Nur Φ Blöcke
in x -Richtung
(skalarer Wert)

$$= \frac{1}{2} k_1 \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_z$$

A33 a) ges: Φ_d, \vec{E}_r
Ansatz: Stetigkeitsbedingungen für Tangentialkomp. von \vec{H}

$$H_{t1} = H_{t2} \quad \vec{r} = x\vec{e}_x, \quad t=0$$

$$H_{e,y} + H_{r,y} = H_{d,y}$$

$$H_e e^{-i k_1 \sin \bar{\Phi}_e x} + H_r e^{-i k_1 \sin \bar{\Phi}_r x} = H_d e^{-i k_2 \sin \bar{\Phi}_d x}$$

wie in A31: $\boxed{\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_r}$

$$k_1 \sin \bar{\Phi}_e = k_2 \sin \bar{\Phi}_d$$

$$\rightarrow \bar{\Phi}_d = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_2} \sin \bar{\Phi}_e\right)$$

Winkelfall + transv. Wellenlänge $(\hat{=} A31)$

b) $\vec{r}=0 \quad \vec{E} = \vec{T} \vec{H} \times \vec{e}_n = \vec{T} H_y (\vec{e}_y \times (\underbrace{\oplus}_{\text{Vorklauf}} \cos \bar{\Phi} \vec{e}_z + \underbrace{\ominus}_{\text{rücklauf}} \sin \bar{\Phi} \vec{e}_x))$

$$= \vec{T} H_y (\pm \cos \bar{\Phi} \vec{e}_x - \sin \bar{\Phi} \vec{e}_z)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{112}}}$$

c) Stetigkeitsbedingungen:

(1) $H_e + H_r = H_d$ (y-Komp.)

(2) $E_{\text{tan},e} + E_{\text{tan},r} = E_{\text{tan},d}$

$$E_{e,x} + E_{r,x} = E_{d,x}$$

$$T_1 H_e \cos \bar{\Phi}_e - T_1 H_r \cos \bar{\Phi}_r = T_2 H_d \cos \bar{\Phi}_d$$

$$\Rightarrow H_r = \frac{T_1 \cos \varphi_e - T_2 \cos \varphi_d}{T_1 \cos \varphi_e + T_2 \cos \varphi_d} H_e$$

$$H_d = \frac{2T_1 \cos \varphi_e}{T_1 \cos \varphi_e + T_2 \cos \varphi_d} \cdot H_e$$

d) „Reflexionskoeffizient“ $r = \frac{S_r}{S_e} = \frac{H_r^2}{H_e^2} \stackrel{d)}{\downarrow} = \left(\frac{T_1 \cos \varphi_e - T_2 \cos \varphi_d}{T_1 \cos \varphi_e + T_2 \cos \varphi_d} \right)^2$

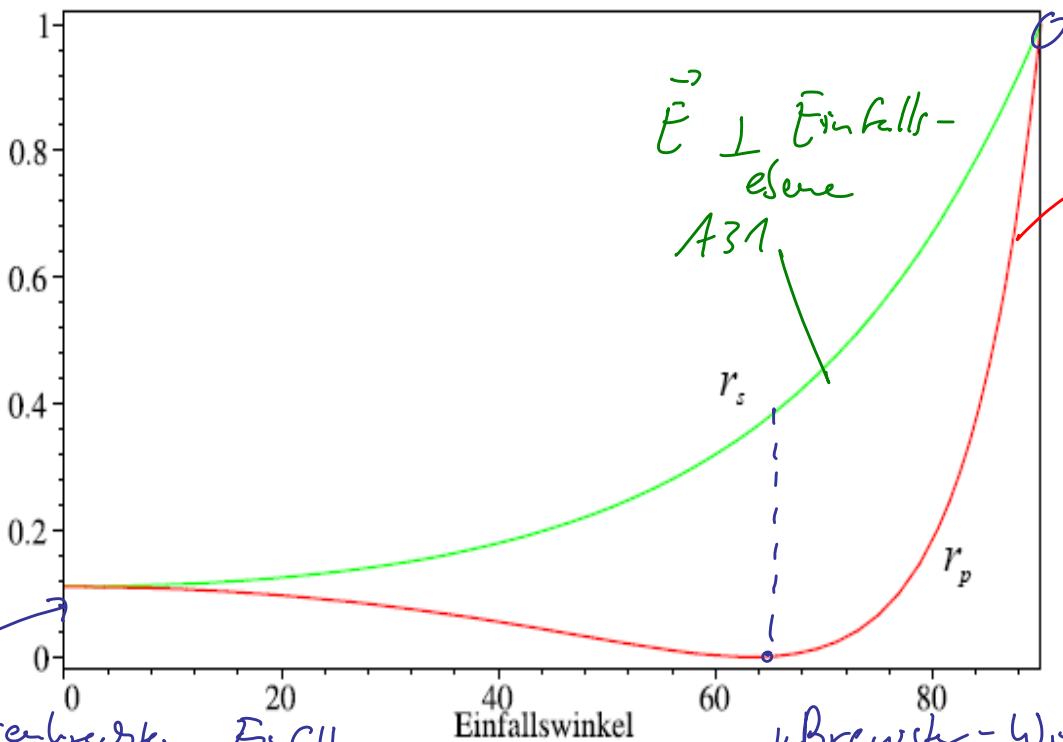
$$T_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}} \quad T_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \quad \epsilon_2 = 4 \text{ (Glas)}, \quad \epsilon_{r1} = 1$$

$$\Rightarrow T_1 = 2T_2 \quad \Rightarrow r = \left(\frac{2 \cos \varphi_e - \cos \varphi_d}{2 \cos \varphi_e + \cos \varphi_d} \right)^2$$

mit $\varphi_d = \arcsin\left(\frac{1}{2} \sin \varphi_e\right)$ lässt sich $r(\varphi_e)$ plotten
 s. Markierung.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \quad \left(h = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \right)$$

A31: $r_s = \left(\frac{\cos \varphi_e - 2 \cos \varphi_d}{\cos \varphi_e + 2 \cos \varphi_d} \right)^2$



bei senkrechten Einfall kein Unterschied zw. senkrecht und parallel polarisiertem Licht

„Brewster-Winkel“ großer Unterschied, $\approx 65^\circ$
 Hier wird nur Licht mit senkrechtem \vec{E} reflektiert

⇒ Bei schrägem Einfall wird unpolarisiertes Licht (d.h. es sind
auf optisch dichtere Medien

sowohl Anteile \perp als auch \parallel vorhanden) polarisiert, d.h. eine Komponente
wird deutlich schwächer (bzw. gar nicht) reflektiert.

