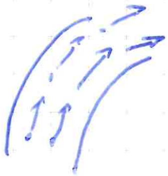
Wiederholung zu HM:

Sklarfelder: Ordnen jedem Punkt im Raum einen skalaren Wert zu. Bsp.: Temperatur, el. Potential

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, in FBW oft $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$

Vektorfelder: Ordnen jedem Punkt im Raum einen Vektor zu

Bsp.: Strömungen  , $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, in FBW oft $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Partielle Ableitung: geg.: Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

PA: $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

Differentialoperatoren in kartesischen Koordinaten

Gradient: f sei Sklarfeld ($f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

dann: $\mathrm{grad}(f) := \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix}$ Vektorfeld

↳ Richtung: Steilster Anstieg
Stärke: Änderungsrate

Divergenz: $\vec{f}$ sei Vektorfeld $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

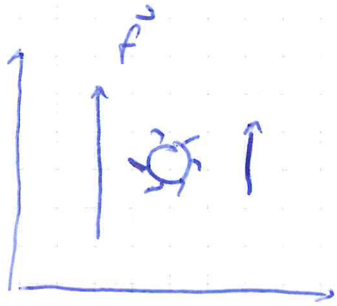
dann: $\mathrm{div}\, \vec{f} := \underbrace{\dfrac{\partial f_x}{\partial x} + \dfrac{\partial f_y}{\partial y} + \dfrac{\partial f_z}{\partial z}}$

Sklarfeld: Gibt an ob/wieviel "Strömung" im Punkt entsteht/endet

Quelle   Senke

Rotation: $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} \vec{f} := \begin{pmatrix} \partial f_z / \partial y - \partial f_y / \partial z \\ \partial f_x / \partial z - \partial f_z / \partial x \\ \partial f_y / \partial x - \partial f_x / \partial y \end{pmatrix}$$

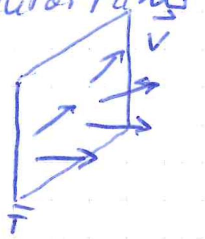


rot: Drehrichtung & Geschwindigkeit eines imag. Schaufelrades

Flächenintegrale über Vektorfelder

$$\iint_F \vec{A} \, d\vec{f}$$

$d\vec{f}$: infinitesimales Flächenelement



„Wie viel $\vec{v}$ fließt durch F?" (Skalar, nur Anteile $\perp$ F zählen)

Richtung: Normalenvektor der Fläche F am jeweiligen Punkt

$$\oiint_F \vec{v} \, d\vec{f}$$: Integral über geschlossene Fläche, z.B. Oberfläche einer Kugel K

$$F = \underbrace{\partial K}_{\text{Rand von } K}$$

Volumenintegral über Skalarfelder:

$$\iiint_V A \, dv$$

dv: Volumenelement

„Wie viel von A ist in V?"

1. Übung: Felder u. Wellen

1. Aufgabe:

a) Geg.: $\vec{V} = \frac{k}{3}\left(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z\right)$

Ges.: $\operatorname{div}(\vec{V})$

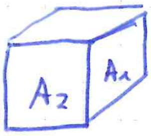
$$\operatorname{div}(\vec{v}) \overset{FS}{=} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} = \underline{\underline{k}}$$

const!

b) Geg.: $\vec{V}$

Ges.: $$\iint_{\partial W} \vec{V}\,d\vec{f} = \iint_{A_1} \vec{V}\,d\vec{f} + \iint_{A_2} \vec{V}\,d\vec{f} + \dots + \iint_{A_6} \vec{V}\,d\vec{f}$$

W: Würfel



1. Schritt: (Berechne A_1)

$$\iint_{A_1} \vec{v}\,d\vec{f} = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \vec{V}\,\vec{e}_x\,dy\,dz = \boxed{*}$$

FS: $d\vec{f} = \vec{e}_x\,dy\,dz$

<u>NR</u> $$\vec{V}\cdot\vec{e}_x = \frac{k}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k/3 \cdot x$$

$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x = 0$, $\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x = 0$

$$\boxed{*} = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{k}{3}\,x\,dy\,dz\,\Big|_{x=a} = \frac{k}{3}a\int_{-a}^{a}\left[y\right]_{-a}^{a}\,dz = \frac{k}{3}a\cdot 2a\cdot\left[z\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{k}{3}a\cdot 2a\cdot 2a$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3}k\,a^3}}$$

2. Schritt: Berechne A_2 $\iint_{A_2} \vec{V}\, d\vec{f} = \int_{-a}^{}\int_{-a}^{} -\vec{V}\, \vec{e}_y\, dx\, dz = \boxed{*}$

$d\vec{f} = -\vec{e}_y\, dx\, dz \quad , \quad y = -a$ || NR $\vec{V} \cdot \vec{e}_y = k/3 \cdot y$

$\boxed{*} = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} -\frac{k}{3} y\, dx\, dz \Big|_{y=-a} = \frac{k}{3} a \int_{-a}^{a} [x]_{-a}^{a}\, dz = \frac{k}{3} a \cdot 2a \cdot 2a$

$= \underline{\underline{\frac{4}{3} k a^3}}$

$A_{ges} = \sum_{i=1}^{6} A_i = 6 \cdot \frac{4}{3} k a^3 = \underline{\underline{8 k a^3}}$

c) geg.: $\operatorname{div}(\vec{V}) = k$

ges.: $\iiint_W \operatorname{div}(\vec{V})\, dV \underset{FS}{=} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} k\, dx\, dy\, dz$

$dV = dx\, dy\, dz$

$= k \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a = \underline{8 k a^3}$

(identisch zu b)

2. Aufgabe:

a) geg.: $\vec{V} = \frac{k}{3} r \vec{e}_r$

ges.: $\operatorname{div}(\vec{V})$

Achtung: Kugelkoordinaten

Radius r; Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$; Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\operatorname{div}(\vec{V}) \underset{FS}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \cdot \underbrace{\tfrac{k}{3} r}_{=V_r}\Big) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big(\underbrace{V_\vartheta}_{=0} \sin\vartheta\Big)$$

$$+ \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial V_\varphi = 0}{\partial \varphi}$$

$$= \underline{\underline{k}}$$

b) geg.: $\vec{V}$

ges.: $\displaystyle\iint_{\partial K} \vec{V}\, d\vec{f} \underset{FS}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{V}\, \vec{e}_r\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \Big|_{r=a} = \boxed{*}$

K: Kugel

$d\vec{f} = \vec{e}_r\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\boxed{*} = \frac{k}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta}_{[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 1-(-1) = 2} d\varphi = \frac{k}{3} a^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{4}{3} k a^3 \pi}}$$

c) $\displaystyle\iiint_K \operatorname{div}(\vec{V})\, dv = k \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \boxed{*}$

FS: $dv = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\boxed{*} = \frac{1}{3} k a^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta}_{=2} d\varphi = \frac{1}{3} k a^3 \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3} k a^3 \pi}}$$

(identisch zu b)

Aufgabe 3

a) Geg.: $\vec{v} = \frac{k}{3} R \vec{e}_R + k \vec{e}_z$

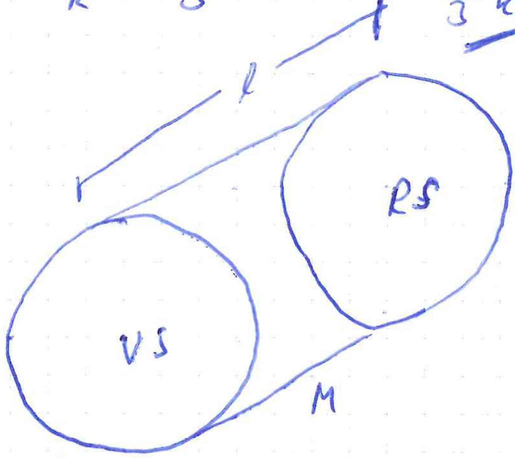
Ges.: $\operatorname{div}(\vec{v})$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) \overset{PS}{=} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \underbrace{\frac{k}{3} R}_{= V_R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underbrace{\cdot \, 0}_{= V_\varphi = 0}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(k) = \frac{1}{R} \cdot \frac{2}{3} k \cdot R = \frac{2}{3} k$$

b) Geg.: $\vec{v}$

Ges.: $\iint_{\partial Z} \vec{v} \, d\vec{f} = \boxed{*}$



$$\boxed{*} = \iint_{VS} \vec{v} \, d\vec{f} + \iint_{M} \vec{v} \, d\vec{f} + \iint_{RS} \vec{v} \, d\vec{f}$$

VS: $d\vec{f} = - \vec{e}_z \, R \, dR \, d\varphi$; $\varphi = 0 \dots 2\pi$; $R = 0 \dots a$

M: $d\vec{f} = \vec{e}_R \, R \, d\varphi \, dz$ " $z = -\frac{l}{2} \dots \frac{l}{2}$

RS: $d\vec{f} = \vec{e}_z \, R \, dR \, d\varphi$; $\varphi = 0 \dots 2\pi$; $R = 0 \dots a$

$$\iint_{dz} \vec{v} \, d\vec{f} = \underbrace{\iint_{VS} \vec{v} \, d\vec{f} + \iint_{RS} \vec{v} \, d\vec{f}}_{= 0} + \iint_{M} \vec{v} \, d\vec{f}$$