Felder und Wellen

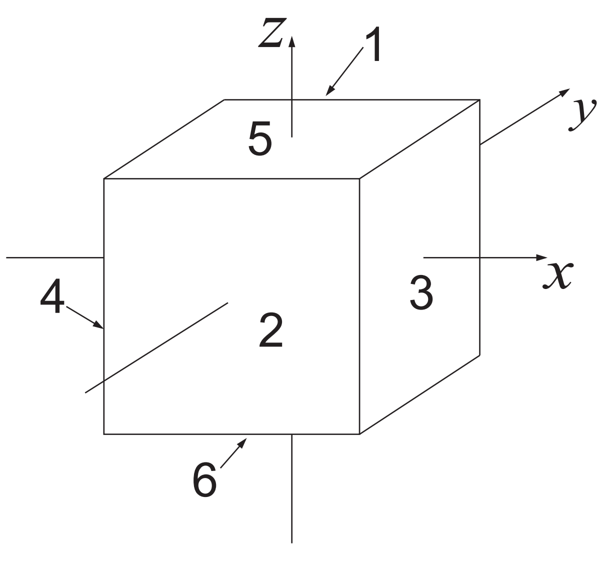
WS 2015/2016

Musterlösung zur 1. Übung

1. Aufgabe

a)

$$\begin{aligned} div\,\vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= \frac{k}{3}\left(\frac{\partial\, x}{\partial x} + \frac{\partial\, y}{\partial y} + \frac{\partial\, z}{\partial z}\right) \\ &= \frac{k}{3}\,(1+1+1) \\ &= k \end{aligned}$$



b) Seite 1: $d\vec{f} = \vec{e}_y \, dx \, dz, \quad y = a$

$$\begin{aligned}
\int \vec{V} \, d\vec{f} &= \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{k}{3} \left(x \, \vec{e}_x + y \, \vec{e}_y + z \, \vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_y \, dx \, dz \\
&= \frac{k}{3} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} y \, \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y \, dx \, dz \\
&= \frac{k}{3} \int_{-a}^{a} y \, [z]_{-a}^{a} \, dx \\
&= \frac{k}{3} \, y \, 2a \, [x]_{-a}^{a} \\
&= \frac{k}{3} \, y \, 4a^2 \\
&= \frac{k}{3} \, 4a^3
\end{aligned}$$

Seite 2: $d\vec{f} = -\vec{e}_y \, dx \, dz, \quad y = -a$

$$\begin{aligned}
\int \vec{V} \, d\vec{f} &= \frac{k}{3} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} y \, \vec{e}_y \cdot -\vec{e}_y \, dx \, dz \\
&= -\frac{k}{3} \, y \, 4a^2 \\
&= \frac{k}{3} \, 4a^3
\end{aligned}$$

Die Flächenintegrale über die anderen Seiten werden analog berechnet und führen zum gleichen Ergebnis.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \oint \vec{V} \, d\vec{f} &= 6 \frac{k}{3} 4a^3 \\
&= 8ka^3
\end{aligned}$$

c)

$$div \, \vec{V} = k$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} k \, dx \, dy \, dz &= k \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \\
&= 8ka^3
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist gleich dem Flächenintegral von b)

2. Aufgabe

a)

$$\begin{aligned}
div \, \vec{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{k}{3} r \right) \quad \vec{V} \text{ hat nur eine } r\text{−Komponente} \\
&= \frac{k}{3r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \\
&= \frac{k}{3r^2} 3r^2 \\
&= k
\end{aligned}$$

b) $d\vec{f} = \vec{e}_r\, r^2\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

$$\begin{aligned}
\oint \vec{V}\, d\vec{f} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{k}{3} r\, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r\, r^2\, sin\theta\, d\theta\, d\phi \\
&= \frac{4\pi k r^3}{3} \\
&= \frac{4\pi k a^3}{3}
\end{aligned}$$

c) $dv = r^2\, \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

$$\begin{aligned}
\int div\, \vec{V}\, dv &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} k \cdot r^2\, \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\
&= k\, 4\pi \int_0^{a} r^2\, dr \\
&= 4\pi k \frac{1}{3} \left[r^3 \right]_0^a \\
&= \frac{4\pi k a^3}{3} \\
&= \text{Ergebnis von b)}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

a) In Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
div\, \vec{V} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\, V_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial\, \varphi} (V_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} V_z \\
&= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R\, \frac{k}{3} R \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} k}_{=0} \\
&= \frac{2}{3} k
\end{aligned}$$

b) Die Integration des Feldes über die Zylinderoberfläche wird in die drei Bereiche Mantel, Vorderseite und Rückseite zerlegt. Es gilt:

$$\oint_{\text{Zylinder}} \vec{V}\, d\vec{F} = \int_{\text{Mantel}} \vec{V}\, d\vec{F} + \int_{\text{Vorderseite}} \vec{V}\, d\vec{F} + \int_{\text{Rückseite}} \vec{V}\, d\vec{F}$$

Mantel:
Der Normalenvektor der Manteloberfläche zeigt immer in $\vec{e}_R$ Richtung. Es gilt Zylinderkoordinaten:

$$d\vec{F} = R\, d\varphi\, dz\, \vec{e}_R$$

$$\begin{aligned}
z &= -l/2..l/2 \\
\varphi &= 0..2\pi \\
R &= a
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{Mantel}} \vec{V}\,d\vec{F} &= \int_{z=-l/2}^{l/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{V}\;R\,d\varphi\,dz\,\vec{e}_R\,\Bigg|_{R=a} \\
&= \int_{z=-l/2}^{l/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{k}{3}\,R\,\vec{e}_R\;+k\vec{e}_z\right) R\,d\varphi\,dz\,\vec{e}_R\,\Bigg|_{R=a} \\
&= \frac{k}{3}\,a^2\;\int_{z=-l/2}^{l/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\,dz \\
&= \frac{k}{3}\,a^2\,2\pi\int_{z=-l/2}^{l/2} dz \\
&= \frac{k}{3}\,a^2\,2\pi l = \underbrace{\frac{k}{3}\,a}_{\vec{e}_R\text{ Komponente des Feldes}}\;\underbrace{2\pi a l}_{\text{Manteloberfläche}}
\end{aligned}$$

Da die $\vec{e}_R$-Komponente des Feldes auf der Manteloberfläche konstant ist, kann das Integral auch direkt aus dem Produkt der $\vec{e}_R$-Komponente des Feldes und der Manteloberfläche berechnet werden.

Vorder- und Rückseite:

Der Normalenvektor der Seiten muss immer aus dem Volumen herauszeigen. Daher zeigt er bei Vorderseite in die $-\vec{e}_z$-Richtung und bei der Rückseite in die $+\vec{e}_z$ Richtung, wenn die z-Achse in die Zeichenebene hineingeht.

Es gilt in Zylinderkoordinaten:

$$d\vec{F} = R\,dR\,d\varphi\,(\pm\vec{e}_z)$$

$$\begin{aligned}
z &= -l/2 \text{ bzw. } l/2 \\
\varphi &= 0..2\pi \\
R &= 0..a
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{Seiten}} \vec{V}\,d\vec{F} &= \int_{R=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{V}\Big|_{z=l/2}\;R\,d\varphi\,dR\,\vec{e}_z - \int_{R=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{V}\Big|_{z=-l/2}\;R\,d\varphi\,dR\,\vec{e}_z \\
&= \int_{R=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\vec{V}\Big|_{z=l/2} - \vec{V}\Big|_{z=-l/2}\right)\;R\,d\varphi\,dR\,\vec{e}_z \\
&= 0
\end{aligned}$$

Zusammen:

$$\oint_{\text{Zylinder}} \vec{V}\,d\vec{F} = \frac{k}{3}\,a^2\,2\pi l$$

c) In Zylinderkoordinaten:

$$dv = R\,dR\,d\varphi\,dz$$

$$\begin{aligned}
R &= 0..a \\
z &= -l/2..l/2 \\
\varphi &= 0..2\pi
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int div\, \vec{V}\, dv &= \int_{z=-l/2}^{l/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{a} \frac{2}{3} k\, R\, dR\, d\varphi\, dz \\
&= \int_{z=-l/2}^{l/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{3} k\, \frac{a^2}{2}\, d\varphi\, dz \\
&= \int_{z=-l/2}^{l/2} \frac{k}{3} a^2\, 2\pi\, dz \\
&= \frac{k}{3} a^2\, 2\pi l
\end{aligned}$$