

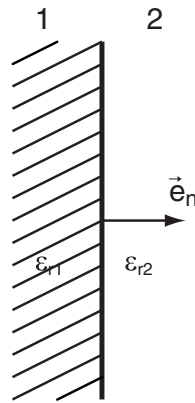
Felder und Wellen

WS 2015/2016

Musterlösung zur 2. Übung

4. Aufgabe

Grenzbedingungen:



$$\sigma = D_{n2} - D_{n1} \quad (1)$$

$$E_{t2} = E_{t1} \quad (2)$$

Hier: Keine Grenzflächenladung, $\sigma = 0$

$$\Rightarrow D_{n2} = D_{n1} \quad (3)$$

Materialgleichung:

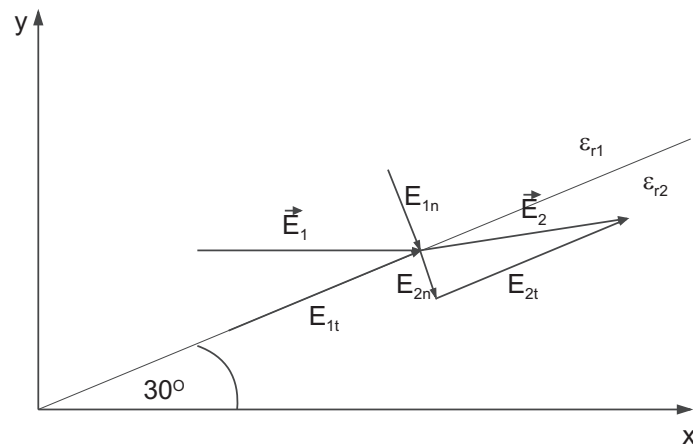
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (4)$$

Einsetzen in (3):

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{n2} &= \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{n1} \\ \Rightarrow E_{n2} &= \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_{n1} \end{aligned} \quad (5)$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{aligned} \frac{D_{t2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} &= \frac{D_{t1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \\ \Rightarrow D_{t2} &= \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} D_{t1} \end{aligned} \quad (6)$$



Lage der Grenzfläche:

gegeben: $\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x$, gesucht: $\vec{D}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{D}_2$. aus Gleichung (4) folgt:

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \vec{E}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_0 \vec{e}_x$$

Zerlegung von $\vec{E}_1$ in Normal- und Tangentialkomponente:

$$E_{n1} = E_0 \sin 30^\circ = \frac{E_0}{2}$$

$$E_{t1} = E_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0$$

Anwendung der Grenzbedingungen:

$$(5) \Rightarrow E_{n2} = \frac{1}{2} E_{n1} = \frac{E_0}{4}$$

$$(2) \Rightarrow E_{t2} = E_{t1} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0$$

Zusammenfassung der x - und y - Anteile:

$$E_{x2} = E_{n2} \sin 30^\circ + E_{t2} \cos 30^\circ = \frac{7}{8} E_0$$

$$E_{y2} = -E_{n2} \cos 30^\circ + E_{t2} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} E_0$$

Bestimmung von $\vec{D}_2$ aus der Materialgleichung:

$$(4) \Rightarrow \vec{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \vec{E}_2 = \frac{7}{4} \varepsilon_0 E_0 \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon_0 E_0 \vec{e}_y$$

5. Aufgabe

Die Aufgabe wird mit der Methode: Satz vom Hüllenfluß & Symmetrie (Skript Kapitel 3.3) gelöst. Ausgangspunkt ist die Maxwellgleichung

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int \rho dv$$

Die Ladungsverteilung ist kugelsymmetrisch $\Rightarrow \vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$, Rechnung in Kugelkoordinaten. Außerdem gilt $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Linke Seite der Gleichung:

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon_0 E_r(r) \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_1 r^2 \underbrace{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{4\pi} = \varepsilon_0 E_r(r) \cdot 4\pi r^2$$

Dieses Zwischenergebnis gilt für alle kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen (konstant in ϑ, φ).

Rechte Seite:

Die Ladungsdichte ist für die beiden Bereiche $0 \leq r < R_0$ und $R_0 \leq r < \infty$ durch unterschiedliche Funktionen definiert. Die praktischste Vorgehensweise ist, die Ladung zunächst innerhalb eines Kugelvolumen mit dem Radius $r < R_0$ zu bestimmen und dann die Ladung innerhalb eines Kugelvolumen mit Radius $r \geq R_0$ zu bestimmen.

Bereich 1 ($r \leq R_0$):

$$\begin{aligned} \int \varrho dv &= \int_{r'=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^\pi \varrho(r') r'^2 \underbrace{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{4\pi} dr' \\ &= 4\pi \int_0^r \frac{\varrho_1}{R_0^2} r'^2 r'^2 dr' \\ &= 4\pi \left[\frac{\varrho_1}{R_0^2} \frac{r'^5}{5} \right]_0^r \\ &= 4\pi \frac{\varrho_1}{R_0^2} \frac{r^5}{5} =: Q(r) \quad (\text{Ladung innerhalb der Kugel mit Radius } r) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{4\pi \frac{\varrho_1}{R_0^2} \frac{r^5}{5}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\varrho_1 r^3}{5\varepsilon_0 R_0^2}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\varrho_1}{5\varepsilon_0} \frac{r^3}{R_0^2} \vec{e}_r$$

Bereich 2 (Ladung innerhalb eines Kugelvolumens mit $R_0 \leq r < \infty$):

Das Kugelvolumen mit $r \geq R_0$ enthält auch den Bereich 1. Die Gesamtladung Q im Bereich 1 ist (s.o)

$$Q(R_0) = \frac{4}{5} \pi \varrho_1 R_0^3$$

Daraus folgt für $r \geq R_0$:

$$\begin{aligned}
 \int \varrho \, dv &= \int_{r'=R_0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \varrho(r') \, r'^2 \underbrace{\sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{4\pi} \, dr' + Q(R_0) \\
 &= 4\pi \int_{R_0}^r \varrho_2 \frac{R_0^4}{r'^4} r'^2 \, dr' + Q(R_0) \\
 &= 4\pi \varrho_2 \left[-\frac{R_0^4}{r'} \right]_{R_0}^r + Q(R_0) \\
 &= 4\pi \varrho_2 R_0^3 \left(1 - \frac{R_0}{r} \right) + \frac{4}{5} \pi \varrho_1 R_0^3
 \end{aligned}$$

Linke Seite auflösen nach E_r :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow E_r &= \frac{4\pi \varrho_2 R_0^3 \left(1 - \frac{R_0}{r} \right) + \frac{4}{5} \pi \varrho_1 R_0^3}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \\
 &= \frac{\varrho_2}{\varepsilon_0} \frac{R_0^3}{r^2} \left(1 - \frac{R_0}{r} \right) + \frac{\varrho_1}{5\varepsilon_0} \frac{R_0^3}{r^2}
 \end{aligned}$$

$$\vec{E}_2 = E_r \vec{e}_r$$

6. Aufgabe

a) Formelsammlung

$$\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{E_0}{r_0} r' e^{-r'/r_0} \, dr'$$

Randbedingungen: $r_2 = r$; $r_1 = \infty$; $\Phi(\infty) = 0$

Substitution: $\tilde{r} = r'/r_0$; $dr' = r_0 d\tilde{r}$

$$\begin{aligned}
 \Phi(r) - 0 &= - \int_{\infty}^{r/r_0} E_0 \tilde{r} e^{-\tilde{r}} r_0 d\tilde{r} \\
 &= E_0 r_0 e^{-r/r_0} \left(\frac{r}{r_0} + 1 \right) \\
 \Rightarrow \Phi(r) &= E_0 e^{-r/r_0} (r + r_0)
 \end{aligned}$$

- b) Nur E_r -Komponente $\Rightarrow$ Kugelsymmetrie. Es gilt die 1. Maxwellgleichung in Differentialform

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho \\ \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$\operatorname{div} \vec{E}$ in Kugelkoordinaten mit $E_\vartheta = E_\varphi = 0$ (Formelsammlung 4.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r(r)) &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ \frac{E_0}{r_0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^3 e^{-r/r_0}) &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ \frac{E_0}{r_0} \frac{1}{r^2} \left(3r^2 e^{-r/r_0} - \frac{r^3}{r_0} e^{-r/r_0} \right) &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ \varrho &= \frac{E_0 \varepsilon_0}{r_0} \left(3 - \frac{r}{r_0} \right) e^{-r/r_0} \end{aligned}$$

Aufgabe 7

- a) Raumladungsdichten:

$$R \leq R_a : \quad D_R = \varepsilon_0 E_R = \varrho_0 \frac{R^2}{R_a}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} = \varrho &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{R}{R_a} D_R \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \varrho_0 \frac{R^2}{R_a} \\ &= 3 \varrho_0 \frac{R}{R_a} \end{aligned}$$

$$R_a < R \leq R_b : \quad \vec{E} = 0 \quad \varrho = 0$$

$$R_b < R \leq R_c : \quad D_R = \varrho_0 \frac{R_a^2}{R}$$

$$\varrho = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \varrho_0 \frac{R_a^2}{R} \right) = 0$$

$$R_c < R : \quad \vec{E} = 0 \quad \varrho = 0$$

Flächenladungsdichten:

$$\sigma = D_{N2} - D_{N1}$$

$$\sigma_a = -\varrho_0 \frac{R_a^2}{R_a} = -\varrho_0 R_a$$

$$\sigma_b = +\varrho_0 \frac{R_a^2}{R_b}$$

$$\sigma_c = -\varrho_0 \frac{R_a^2}{R_c}$$

$$\text{b) } \Phi(\infty) = 0$$

$$R > R_c : \quad E = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi = 0$$

$$\begin{aligned} R_b < R \leq R_c : \quad \Phi(R) - \Phi(R_c) &= - \int_{R_c}^R \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \frac{R_a^2}{R'} dR' & \Phi(R_c) &= 0 \\ &= - \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} R_a^2 \ln \frac{R}{R_c} \end{aligned}$$

$$R_a < R \leq R_b : \quad \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi = - \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} R_a^2 \ln \frac{R_b}{R_c}$$

$$\begin{aligned} R \leq R_a : \quad \Phi(R) - \Phi(R_a) &= - \int_{R_a}^R \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{R_a} dR \\ \Phi(R) &= - \left[\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{3} \frac{R^3}{R_a} \right]_{R_a}^R - \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} R_a^2 \ln \frac{R_b}{R_c} \\ \Phi(R) &= - \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{R^3}{R_a} - R_a^2 \right) + R_a^2 \ln \frac{R_b}{R_c} \right] \end{aligned}$$