Felder und Wellen: Übung 3

Wiederholung: Satz vom Hüllenfluss: $\oint\!\!\!\oint \vec{D}\, d\vec{F} = \iiint \rho \, dv$

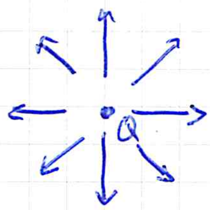
Im Fall von Kugelsymmetrie: $D_r(r) \cdot A(r) = Q_{ges}(r)$

$$\Downarrow$$

Methode zur Berechnung von $\vec{D}$ aus ρ, wenn Anordnung komplett symmetrisch

Punktladung Q im Ursprung:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \vec{e}_r} \sim \frac{1}{r^2}$$



$\vec{E}$ radiales Feld

$$\boxed{\phi(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}} \sim \frac{1}{r}$$

Eine Ladungsverteilung im Raum $\hat{=}$ Unendlich viele, unendlich kleine Punktladungen $\rightarrow$ Superposition

$\Rightarrow$ Coulombintegral $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \, dv'$

$$\Downarrow$$

Methode zur Berechnung von ϕ aus ρ

Aufgabe 8:

Geg.: Q , $\phi(\infty) = 0$

Ges.: $\phi(z)$, σ, $\vec{E}$

1. Schritt: $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{r^2\pi}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{a^2\pi}$

2. Schritt: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \, df'$

Ort des Potentials

Ort der Ladung; jedes $\vec{r}\,'$ fließt in Integration ein

NR: $\|\vec{r} - \vec{r}\,'\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{z^2 + R^2}$

$$\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{Q}{a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \underbrace{R\,dR\,d\varphi}_{df'}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{a^2\pi} \left[\sqrt{R^2+z^2}\right]_0^a \cdot 2\pi$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right)$$

$$\phi(\infty) \overset{!}{=} 0 \qquad \lim_{z\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{a^2+z^2}}_{\to\sqrt{z^2}} - \underbrace{\sqrt{z^2}}_{\to\sqrt{z^2}}\right) = 0 \quad ✓$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right)\right)$$

betrachte $z>0$, $\vec{E}$ ist spiegelsymm. zu $z=0$

$$= -\operatorname{grad}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right)\right)$$

$$= -\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right)\right)$$

$$= -\vec{e}_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - 1\right)$$

b) Ges.: $\vec{E}$ für große z

Geg.: $\vec{E}$ aus a)

Taylorreihe um x_0: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Math FS: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$ für $|x| = 1$

$x = \frac{a^2}{z^2}$ $\quad \left|\frac{a^2}{z^2}\right| < 1 \rightarrow z^2 > a^2$

$$\vec{E} = -\vec{e}_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\frac{\cancel{z}}{\cancel{z}\left(\sqrt{\frac{a^2}{z^2}+1}\right)} - 1\right)$$

$$\approx -\vec{e}_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} - 1\right) = \underbrace{\vec{e}_z \frac{Q}{4\pi\varepsilon z^2}}_{\text{für } z \gg a \text{ (auf z-Achse)}}$$

Vgl. Punktladung: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$

$\Rightarrow$ auf z-Achse für sehr große z identisch

Aufgabe 9:

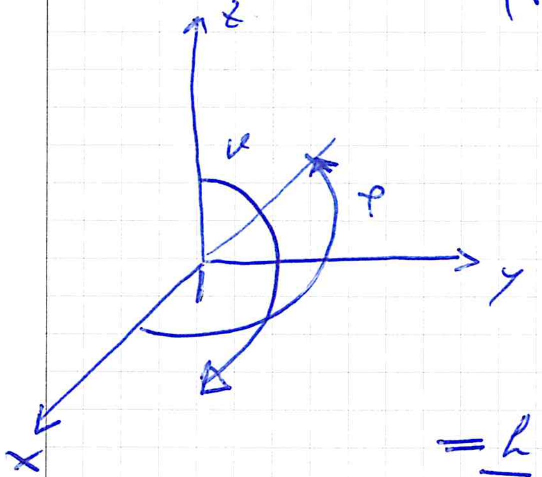
a) Ges.: $\phi(P)$

Geg.: ρ, $P = (0, 0, 0)^T$

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\, dv' \quad \Bigg| \quad \vec r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec r' = \begin{pmatrix} r' \\ \vartheta' \\ \varphi' \end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_i}^{r_a} \frac{\rho}{|\vec r'|}\, r'^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \boxed{*}$$

$|\vec r'| = r'$ in Kugelkoordinaten



$$\boxed{*} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_i}^{r_a} \frac{\rho}{r'}\, r'^2 \sin\vartheta\, dr'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

$$= \frac{\rho}{4\cancel{\pi}\varepsilon} \cdot 2 \cdot \cancel{(2\pi - \pi)} \left[\frac{1}{\cancel{2}} r'^2 \right]_{r_i}^{r_a}$$

$$= \frac{\rho}{4\varepsilon} \left(r_a^2 - r_i^2 \right)$$

b) $\vec E$ für PL: $\quad \vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2}\, \vec e_r \quad \Big| \quad \vec e_r = \frac{\vec r}{\|\vec r\|}$

$\vec E_i$ für PL Q am Ort $\vec r_i$: $\quad \vec E_i(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_i}{\|\vec r - \vec r_i\|^2} \cdot \frac{\vec r - \vec r_i}{\|\vec r - \vec r_i\|}$

$$\Rightarrow \vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{\|\vec r - \vec r_i\|^3} (\vec r - \vec r_i)$$

$$\Delta Q_i = \rho(\vec r_i)\, \Delta V_i \quad \text{(kleines Volumenelement)}$$

$$\Rightarrow \vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho(\vec r_i)\cdot \Delta V_i}{\|\vec r - \vec r_i\|^3} (\vec r - \vec r_i)$$

$$\downarrow \; \Delta V_i \to 0 , \quad \vec r_i \to \vec r\,'$$

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\rho(\vec r\,')\,(\vec r - \vec r\,')}{\|\vec r - \vec r\,'\|^3}\, dv'$$

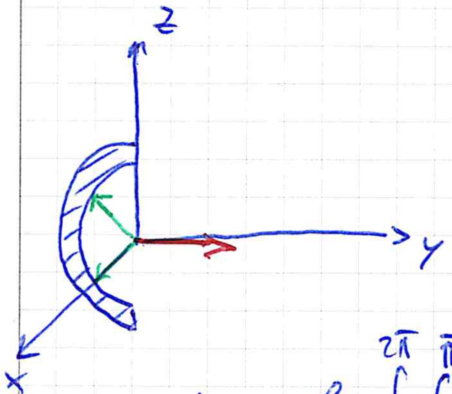
Ges: $\vec E(\vec 0)$

$$\vec E(\vec 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \rho(\vec r\,') \cdot \frac{-\vec r\,'}{r'^{\cancel{3}\,1}} \cancel{r'^2} \sin\vartheta\, dr'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

$$\vec e_{r'} = \vec e_{r'}(\vartheta, \varphi)$$

Darstellung von $\vec e_{r'}$ in $\vec e_x, \vec e_y, \vec e_z$

FS: $\vec e_{r'} = \sin\vartheta' \cos\varphi'\, \vec e_x + \sin\vartheta' \sin\varphi'\, \vec e_y + \cos\vartheta'\, \vec e_z$



$$\vec E(\vec 0) = -\frac{\rho}{4\pi\varepsilon} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{r_i}^{r_a} \Big(\underbrace{\sin\vartheta' \cos\varphi'\, \vec e_x}_{=0} + \sin\vartheta' \sin\varphi'\, \vec e_y + \underbrace{\cos\vartheta'\, \vec e_z}_{=0} \Big) \cdot \sin\vartheta'\, dr'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

$$= -\frac{\rho}{4\pi\varepsilon} (r_a - r_i) \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \sin^2\vartheta' \sin\varphi'\, \vec e_y\, d\vartheta'\, d\varphi' = \frac{\rho}{4\varepsilon} (r_a - r_i)\, \vec e_y$$