

Felder und Wellen

WS 2015/2016

Musterlösung zur 4. Übung

10. Aufgabe

- a) Auf den Leitern befinden sich die Ladungen Q_1 und Q_2 . Wegen der Kugelsymmetrie folgt

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r$$

Das elektrische Feld wird mit dem Satz vom Hüllenfluß berechnet

$$\oint \varepsilon \vec{E} d\vec{f} = \int \rho dv$$

Innerhalb des ersten Leiters befindet sich keine Ladung, deshalb gilt

$$\vec{E} = 0 \text{ für } 0 < r < a$$

Zwischen den Leitern gilt für das Feld (nur Leiter 1 innerhalb der Integrationsfläche)

$$4\pi\varepsilon r^2 E_r = Q_1 \Rightarrow E_r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2} \text{ für } a \leq r < b$$

Für den Bereich ausserhalb des Leiter 2 schließt die Integrationsfläche sowohl Q_1 als auch Q_2 ein. Für \vec{E} gilt

$$E_r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \text{ für } b \leq r < \infty$$

Bei der Berechnung der Potentiale, muß von einem Punkt mit bekanntem Potential ausgegangen werden, das Potential im Unendlichen ist Null ($\phi(\infty) = 0$). Für $b \leq r < \infty$ gilt

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi(\infty) - \int_{\infty}^r E_r dr \\ &= 0 - \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr \\ &= -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Auf dem Leiter 2 gilt

$$\phi_2 = \phi(b) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{b}$$

Mit dem bekannten Potential ϕ_2 kann das Potential für $a \leq r < b$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 \phi(r) &= \phi(b) - \int_b^r E_r dr \\
 &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \int_b^r \frac{1}{r^2} dr \\
 &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_b^r \\
 &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \\
 \phi(a) &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{a} = \phi_1
 \end{aligned}$$

Damit gilt folgendes Gleichungssystem für die Ladungen und die Potentiale auf den Leitern

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{a} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} \\
 \phi_2 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b}
 \end{aligned}$$

Sind die Potentiale bekannt, und sollen die Ladungen berechnet werden, muß das Gleichungssystem nach Q_1 und Q_2 aufgelöst werden. Dieses einfache System kann natürlich durch elementare Umformungen der Gleichungen gelöst werden. Für kompliziertere Problem und bei Einsatz eines Computers ist die formale Darstellung, wie im Skript S. 95ff sinnvoll. Die beiden Gleichungen drücken die Potentiale durch Ladungen und Potentialkoeffizienten aus ($\phi_i = \sum_{k=1}^2 p_{ik} Q_k$, in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

- b) Sollen die Ladungen bei bekannten Potentialen ϕ_i berechnet werden muß die inverse Matrix berechnet werden.

Mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$$

erhält man:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{4\pi\epsilon}{b-a} \begin{bmatrix} ab & -ab \\ -ab & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{4\pi\epsilon ab(\phi_1 - \phi_2)}{b-a} \\
 Q_2 &= \frac{4\pi\epsilon b(-a\phi_1 + b\phi_2)}{b-a}
 \end{aligned}$$

- c) Die Gesamtenergie eines statischen Systems aus Ladungen ist das Integral des elektri-

schen Feldes zum Quadrat über das gesamte Volumen. Rechnung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv \\
 &= 2\pi\epsilon \int_a^b \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 r^2 dr + 2\pi\epsilon \int_b^\infty \left(\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 r^2 dr \\
 &= \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b + \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_b^\infty \\
 &= \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon} \frac{1}{b} \\
 &= \frac{1}{8\pi\epsilon} \left(\frac{Q_1^2}{a} + \frac{2Q_1Q_2}{b} + \frac{Q_2^2}{b} \right)
 \end{aligned}$$

Mit der Formel aus dem Skript S. 112 kann die Energie als Funktion der Ladungen und Potentialkoeffizienten berechnet werden

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} (p_{11}Q_1^2 + p_{12}Q_1Q_2 + p_{21}Q_2Q_1 + p_{22}Q_2^2) \\
 &= \frac{1}{8\pi\epsilon} \left(\frac{Q_1^2}{a} + \frac{2Q_1Q_2}{b} + \frac{Q_2^2}{b} \right)
 \end{aligned}$$

Analog mit der Influenzkoeffizientenmatrix

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} (c_{11}\phi_1^2 + c_{12}\phi_1\phi_2 + c_{21}\phi_2\phi_1 + c_{22}\phi_2^2) \\
 &= \frac{2\pi\epsilon}{b-a} (ab\phi_1^2 - 2ab\phi_1\phi_2 + b^2\phi_2^2)
 \end{aligned}$$

- d) Auf den beiden Leitern befindet sich die gleiche Ladungsmenge mit umgekehrtem Vorzeichen ($Q_2 = -Q_1 = Q$).

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= (p_{11} - p_{12})Q_1 \\
 \phi_2 &= (p_{21} - p_{22})Q_1
 \end{aligned}$$

Es gilt $U = \phi_1 - \phi_2$ und $C = \left| \frac{Q}{U} \right|$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 U &= (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22})Q \\
 C_{ges} &= (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22})^{-1} \\
 &= 4\pi\epsilon \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

Vergleichen Sie diese Lösung mit der Kapazität eines Kugelkondensators (Skript S. 89).

11. Aufgabe

a) Elektrisches Feld : Satz von Gauss:

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int \rho dv$$

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = 2\pi R L D_R$$

$$\begin{array}{ll} R < R_a : & D_R = 0 \quad E_R = 0 \\ R_a \leq R < 2R_a : & D_R = \frac{Q}{2\pi R L} \quad E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} \\ 2R_a \leq R < 3R_a : & D_R = 0 \quad E_R = 0 \\ 3R_a \leq R < 4R_a : & D_R = \frac{Q}{2\pi R L} \quad E_R = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R L} \\ 4R_a \leq R : & D_R = 0 \quad E_R = 0 \end{array}$$

Skalarpotential

$$4R_a \leq R : \quad \Phi(R) = 0$$

$$\begin{aligned} 3R_a \leq R \leq 4R_a : \quad \Phi(R) - \Phi(4R_a) &= - \int_{4R_a}^R E_R dR' = - \int_{4R_a}^R \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R' L} dR' \\ \Phi(R) &= - \left[\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln R' \right]_{4R_a}^R \\ &= - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R}{4R_a} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{4R_a}{R} \end{aligned}$$

$$2R_a \leq R \leq 3R_a : \quad \Phi(R) = konst. = \Phi(3R_a) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} R_a \leq R \leq 2R_a : \quad \Phi(R) - \Phi(2R_a) &= - \int_{2R_a}^R E_R dR' = - \int_{2R_a}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} dR' \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} [R']_{2R_a}^R \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} (2R_a - R) \end{aligned}$$

$$\Phi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} (2R_a - R) + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 R \leq R_a : \quad \Phi(R) = \Phi(R_a) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{4}{3} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Ladung

$$\begin{aligned}
 U = \Phi(R_a) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right) \\
 \Rightarrow Q &= U \frac{4\pi\epsilon_0 L}{1 + 2 \ln \frac{4}{3}}
 \end{aligned}$$

b) Es gibt keine Raumladungen sondern nur Flächenladungen:

$$\sigma = D_{N2} - D_{N1}$$

$$\begin{aligned}
 R = R_a : \quad \sigma &= \frac{Q}{2\pi R_a L} \\
 R = 2R_a : \quad \sigma &= -\frac{Q}{4\pi R_a L} \\
 R = 3R_a : \quad \sigma &= \frac{Q}{6\pi R_a L} \\
 R = 4R_a : \quad \sigma &= -\frac{Q}{8\pi R_a L}
 \end{aligned}$$

c) Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 L}{1 + 2 \ln \frac{4}{3}}$$

d) Maximales E-Feld im Kondensator:

$$\begin{aligned}
 E_{max} = E_D &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} = U \frac{4\pi\epsilon_0 L}{4\pi\epsilon_0 R_a L} \frac{1}{\left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right)} \\
 &= \frac{U}{R_a \left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right)} \\
 \Rightarrow R_a &= \frac{U}{E_D \left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right)}
 \end{aligned}$$

Die Kapazität ist in diesem speziellen Fall unabhängig von R_a . Es gilt:

$$L = C_0 \frac{1 + 2 \ln \frac{4}{3}}{4\pi\epsilon_0}$$

Skizze

