Einleitung: Felder und Wellen Übung 5

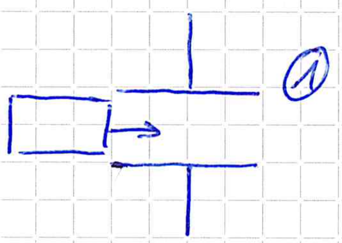
- Wiederholung: Im stationären Fall gilt im idealen Leiter ($\kappa = \infty$): $\vec{E} = 0$, $\phi = \text{const}$
  $\varrho = 0$ $\quad$ ($\text{div}\,\vec{D} = \varrho$)

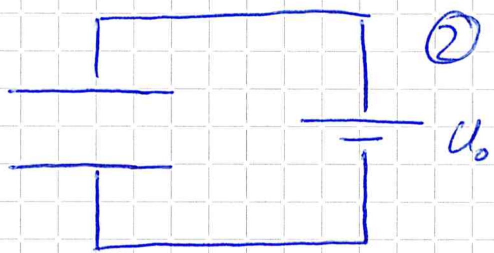
- Kondensatoren im Dielektrikum ($\varepsilon_r > 1$)

Allg. Gleichungen:

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \\ C = \frac{Q}{U} \end{gathered}}$$

Einschieben von Dielektrikum in Kondensator:





① Konst. Ladung (isolierter Kondensator):

σ const. $\longrightarrow$ $\vec{D}$ const. $\xrightarrow{\frac{1}{\varepsilon}\vec{D} = \vec{E}}$ $\vec{E}\downarrow$ $\xrightarrow{U = \int \vec{E}\,ds}$ $U\downarrow \xrightarrow{C = \frac{Q}{U}} C\uparrow$

$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \downarrow$ (nimmt ab)

② Konst. Spannung (z.B. mit Spannungsquelle)

U const. $\longrightarrow$ $\vec{E}$ const. $\xrightarrow{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$ $\vec{D}\uparrow \longrightarrow \sigma\uparrow \longrightarrow Q\uparrow$

$\xrightarrow{C = \frac{Q}{U}} C\uparrow \Longrightarrow W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ (nimmt zu)

• Laplace - Gleichungen:

Kurze Herleitung: Kombinieren der bekannten Gleichungen

$div(\varepsilon \vec{E}) = div \vec{D} = \rho$ und $\vec{E} = -grad\, \phi$

$div(\varepsilon(-grad\, \phi)) = \rho \Rightarrow div(grad(\phi)) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

$\nabla(\nabla \phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

$$\boxed{\nabla(\nabla \phi) = \Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \quad , \quad \boxed{\Delta \phi = 0} \text{ im ladungsfreien Raum}$$

Δ („Laplace-Operator") in versch. Koordinatensystemen

siehe FS

Laplace-Gleichung ist eine DGL → i.d.R. unendlich viele Lösungen → gesuchte Lsg. wird durch Randbedingungen gefunden (Potential auf Rand eines Gebietes)

$$\Rightarrow \Delta \phi = 0$$

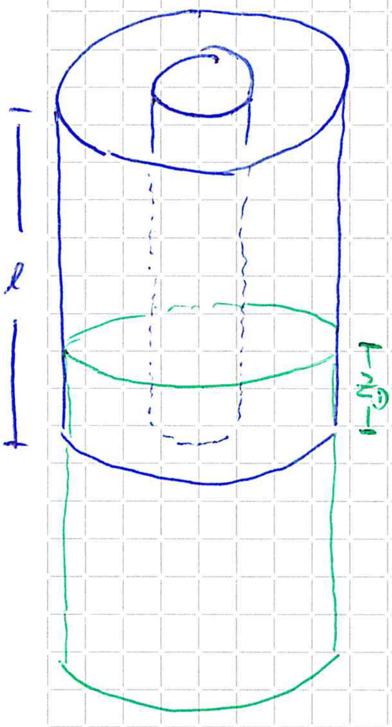
↓ Lösen

Allg. Lösung

↓ Randbedingungen

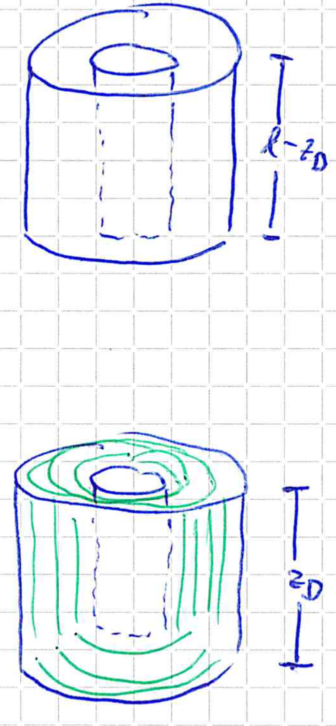
Spezielle Lsg.

Aufgabe 12: ges.: $\vec{E}_v$, $\vec{E}_D$, $\vec{D}_v$, $\vec{D}_D$, $\underbrace{\sigma_v, \sigma_D}_{\text{innere Elektrode}}$



$\Rightarrow$

C_V



Kondensator:
$\varepsilon_r = 1$
$\vec{E}_v$, $\vec{D}_v$, σ_v

C_D

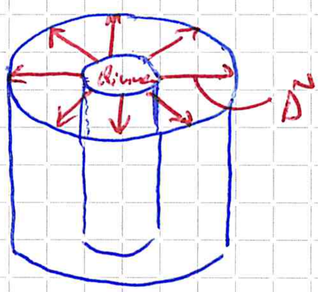
$\varepsilon_r > 1$
$\vec{E}_D$, $\vec{D}_D$, σ_D

$$C_{ges} = C_V + C_D$$

Betrachte Kondensator mit Länge l

$$\oint\!\!\oint \vec{D}\, df = \iiint \rho\, dv \quad (\text{Satz vom Hüllenfluss})$$

$D_R(R) \cdot A(R) = Q = Q_{innen}$, $r_i < R < r_a$



$$\Rightarrow D_R(R) = \frac{Q}{2\pi R L} \Rightarrow E_R(R) = \frac{Q}{2\pi R L \cdot \varepsilon}$$

Problem: Q unbekannt, nur U_0 gegeben.

Es gilt: $\underbrace{\phi(R_i) - \phi(R_a)}_{U_0} = - \int_{R_a}^{R_i} E_R(R)\, dR = - \frac{Q}{2\pi L \varepsilon} \int_{R_a}^{R_i} \frac{1}{R}\, dR$

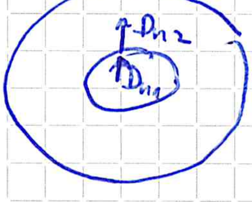
$$\Leftrightarrow \quad U_0 = -\frac{Q}{2\pi L\,\varepsilon} \ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad Q = \varepsilon 2\pi L \frac{U_0}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

$$E_{allg.} = \frac{U_0}{R \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \; ; \qquad D_{allg} = \varepsilon E_{allg.} = \frac{U_0\,\varepsilon}{R \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

$$\vec{E}_V = \vec{E}_D = \frac{U_0}{R \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \cdot \vec{e}_R \qquad \vec{D}_V = \frac{U_0\,\varepsilon_0}{R \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \vec{e}_R$$

$$\vec{D}_D = \frac{U_0\,\varepsilon_0 \varepsilon_r}{R \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \vec{e}_R$$



$$D_{n2} - \underbrace{D_{n1}}_{=0} = \sigma$$

$$\Rightarrow \sigma_V = D_V(R = R_i) = \frac{\varepsilon_0 U_0}{R_i \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \; ; \; \sigma_D = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r U_0}{R_i \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

b) Ges.: $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_V + Q_D}{U} = \frac{\varepsilon_0 2\pi (l - z_D)}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot 2\pi z_D}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \left(l + z_D(\varepsilon_r - 1)\right) \left(= C_V + C_D\right)$$

c) Nach Abklemmen von U_0 ändert sich Q nicht mehr

$$Q = \varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi l \frac{U_0}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \quad (z_D = l)$$

Jetzt herausziehen von $z_D = l \mapsto z_D = \frac{l}{2}$

Ges.: U

$$C\left(z_D = \frac{l}{2}\right) \overset{\text{s. b)}}{=\!=} \frac{\varepsilon_0\, 2\pi}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \left(l + \frac{l}{2}(\varepsilon_r - 1)\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \pi l}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} (\varepsilon_r + 1)$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{\cancel{\varepsilon_0}\, \varepsilon_r\, 2\cancel{\pi l} \frac{U_0}{\cancel{\ln(R_a/R_i)}}}{\frac{\cancel{\varepsilon_0 \pi l}}{\cancel{\ln(R_a/R_i)}} (\varepsilon_r + 1)} = \frac{2 U_0 \varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}$$

d) Ges.: F

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad Q \text{ konst.}$$

$$C\left(z_D = \frac{l}{2}\right) < C(z_D = l)$$

halb herausgezogen — Dielektrikum ganz in Kondensator

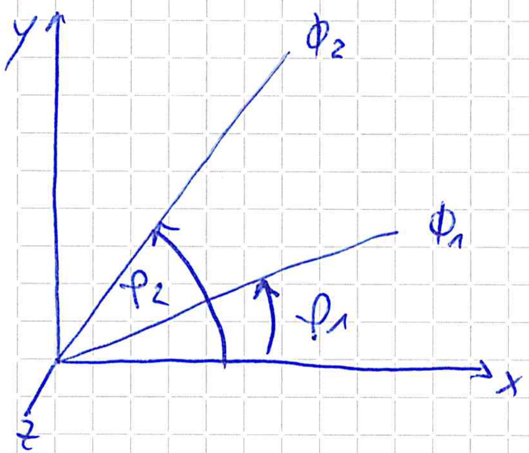
$$\partial W_m = F \cdot ds \Rightarrow F = \frac{dW}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(z)}\right)$$

$$\Leftrightarrow F(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2} \frac{\left(\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi l \frac{U_0}{\ln(R_a/R_i)}\right)^2}{\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln(R_a/R_i)}(l + z(\varepsilon_r - 1))}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r^2 l^2 2\pi U_0^2}{\ln(R_a/R_i)(l + z(\varepsilon_r - 1))}\right)$$

$$= \frac{l^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r^2 \pi U_0^2}{\ln(R_a/R_i)} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{l + z(\varepsilon_r - 1)}\right)$$

$$= -\frac{l^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r^2 \pi U_0^2}{\ln(R_a/R_i)} \cdot \frac{\varepsilon_r - 1}{(l + z(\varepsilon_r - 1))^2}$$

Aufgabe 13:



Wegen unendlicher Ausdehnung:

in z-Richtung: $\frac{d\phi}{dz} = 0$

in R-Richtung: $\frac{d\phi}{dR} = 0$

(weil ϕ auf Leiter const.)

Ges.: ϕ

$$\Delta\phi = 0 \overset{FS}{=} \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R \cdot \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial R}}_{=0}\Big) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \underbrace{\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \quad \Big| \cdot R^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \rightarrow \text{Lösung durch Integration}$$

$$\Rightarrow \int 0 \, d\varphi = \int \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \, d\varphi$$

↓ Integration der 2. Ableitung ist die 1. Ableitung

$$C_1 = \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

↓ Noch einmal integrieren

$$\Rightarrow \phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2$$

↳ Es gibt unendlich viele Potentialverläufe, die

$\Delta \Phi = 0$ erfüllen (c_1, c_2 bisher beliebig)

Bestimmung von c_1, c_2 mittels Randbedingungen:

Es muss gelten: $\phi(\varphi_1) = \Phi_1$, $\phi(\varphi_2) = \phi_2$

$$\begin{cases} \text{I} & \Phi_1 = c_1 \varphi_1 + c_2 \quad | - \text{II} \\ \text{II} & \Phi_2 = c_1 \varphi_2 + c_2 \end{cases}$$

$$\Phi_1 - \phi_2 = c_1 \varphi_1 - c_1 \varphi_2 \Rightarrow c_1 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

c_1 in I): $$\phi_1 = \frac{\Phi_1 - \phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} \varphi_1 + c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \Phi_1 - \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} \varphi_1$$

$$\Rightarrow \Phi(\varphi) = c_1 \varphi + c_2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} (\varphi - \varphi_1) + \Phi_1$$

b) Ges.: $\vec{E}$

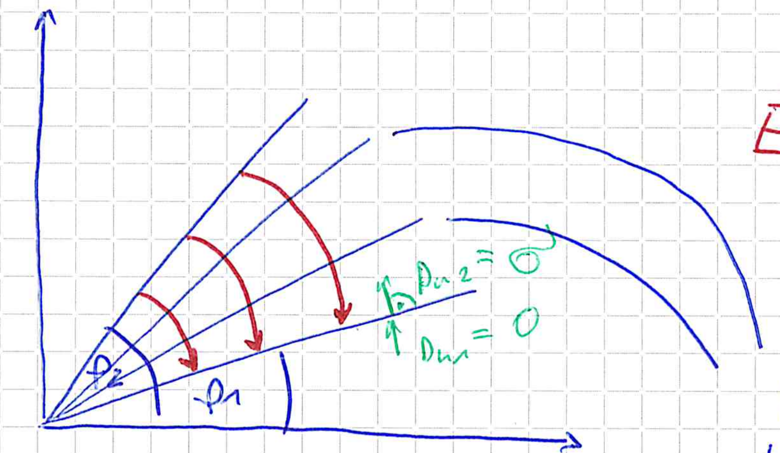
Geg.: Φ aus a)

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \phi$$

$$= -\left(\cancel{\vec{e}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R}} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \cancel{\vec{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} = - \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$



$\vec{E}$ fällt mit $\frac{1}{R}$ ab

$\phi(\varphi)$ Äquipotentialflächen konstant bei konstantem φ

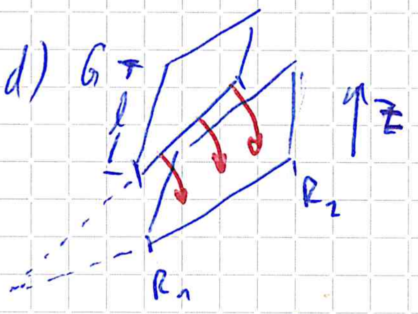
c) ges.: $\sigma(r)$

Geg.: $\vec{D}$ aus b)

$$\sigma(\varphi_1) = D_{n,innen} = -\frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \frac{\phi_1 - \phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

$$\sigma(\varphi_2) = 0 - D_{n,innen} = -\sigma(\varphi_1) = \frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \frac{\phi_1 - \phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

d)



Felder wie zuvor → σ wie bisher

Ges.: $\frac{Q}{l}$

$\varphi = \varphi_1$: $$Q = \int_0^l \int_{R_1}^{R_2} \sigma(R)\, dR\, dz$$

$$\Leftrightarrow \quad Q = l \cdot \int_{R_1}^{R_2} -\frac{\varepsilon_0}{R} \, \frac{\phi_1 - \phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} \, dR$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{Q}{l} = -\varepsilon_0 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\rho_1 - \rho_2}$$