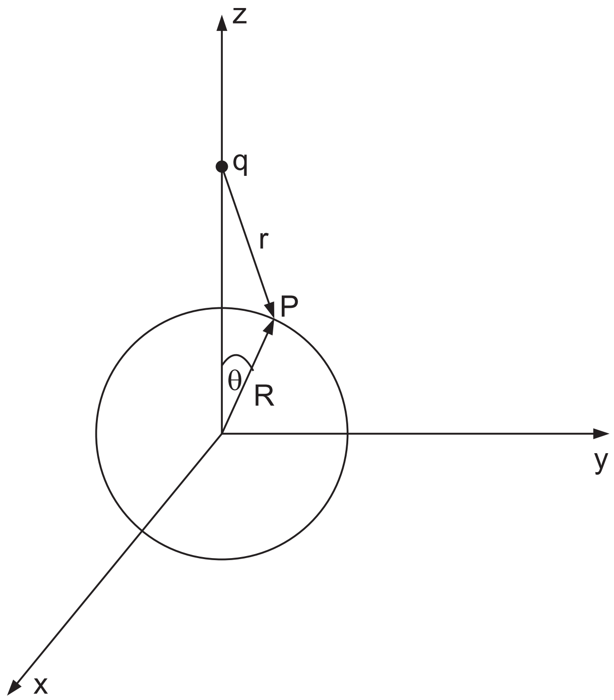
Felder und Wellen

WS 2015/2016

6. Übung

15. Aufgabe

Berechnen Sie das durchschnittliche Potential Φ_D einer Punktladung q, die am Punkt $(0, 0, z)$, $z > R$ platziert ist, auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R um den Ursprung. Vergleichen Sie mit dem Potential im Ursprung.

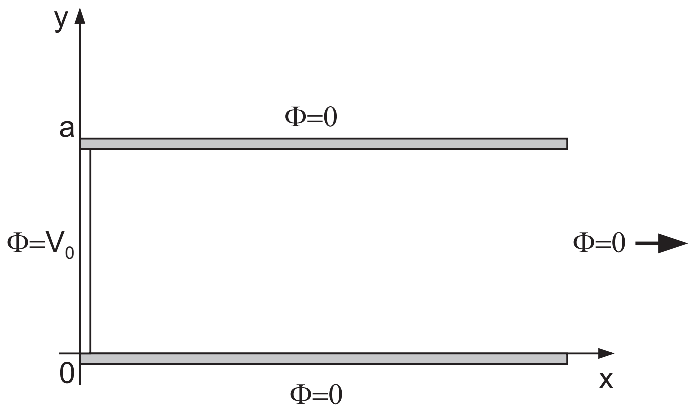


Hinweise zur Lösung:

- Berechnen Sie den Vektor vom Ort der Ladung zum Ort auf der Kugel in kartesischen Koordinaten.
- Vereinfachen Sie die Länge dieses Vektors mittels bekannter trigonometrischer Formeln.

16. Aufgabe

Eine in z-Richtung unendlich ausgedehnte Anordnung besteht aus zwei in $+x$-Richtung unendlich ausgedehnten Platten bei $y = 0$ und $y = a$ mit dem Potential $\Phi = 0$ und einer gegenüber den anderen Platten isolierten Platte bei $x = 0$ mit dem Potential $\Phi = V_0$. Außerdem gilt $\Phi \to 0$ für $x \to \infty$. Berechnen Sie das Potential im Bereich $x = 0 \ldots \infty,\ y = 0 \ldots a$ mit dem Separationsansatz für die Laplacegleichung.



Hinweise zum Lösen der Aufgabe:

1. Separieren Sie die Laplacegleichung $\Delta\phi = 0$ mit dem Produktansatz $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Achten Sie dabei auf eine geschickte Wahl des Vorzeichens der Konstanten $\pm k^2$. Je nach der Wahl des Vorzeichens erhält man als allgemeine Lösung entweder: $A \sin kx + B \cos kx$ oder $Ce^{kx} + De^{-kx}$. Überlegen Sie, welche der Lösungen besser zu den Randbedingungen passt. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $X(x)$ und $Y(y)$.

2. Versuchen Sie mit Hilfe der Randbedingungen so viele Konstanten zu bestimmen wie möglich. Achtung: Eine Konstante lässt sich nicht direkt bestimmen.

3. Es gilt das Linearitätsprinzip: Lösen Φ_1 und Φ_2 die Laplace-Gleichung, dann löst auch $\Phi_1 + \Phi_2$ die Laplace-Gleichung. Die Randbedingung $\Phi(x = 0, 0 < y < a) = V_0$ und $\Phi(x = 0, y = 0 \text{bzw. } y = a) = 0$ lässt sich nur mit der Summe unendlich vieler Lösungen erfüllen. Wenn Sie bisher alles richtig gemacht haben, dann sollten Sie, wenn Sie Ihre bisherige Lösung aufsummieren, auf folgenden Ansatz kommen:

$$\Phi(x = 0, 0 < y < a) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

   Überlegen Sie, wie sich die C_n mit einer Fourierreihenentwicklung lösen lassen. Dabei ist es egal, welche Werte die Lösung ausserhalb von $[0, a]$ annimmt.