Felder und Wellen Übung 6:

Einleitung: Laplace-Gleichung und Separationsansatz

Wiederholung: $\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \rho$ $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$\rho = 0$

$$\boxed{\Delta \phi = 0}$$

(Ladungsfreier Raum)

Einheitssatz: Wenn ein ϕ vorliegt, dass die Randbedingungen erfüllt und $\Delta \phi = 0$ erfüllt (also eine Lsg. gefunden wurde) $\Rightarrow$ dann ist die gefundene Lsg. die einzige Lsg.

Lösungmethoden:
- Vereinfachung durch Symmetrie
  ↳ Eindimensionale Integration (vgl. Ü 5)
- numerisch
- Separationsansatz
- andere analytische Verfahren

Separationsansatz

- kann erfolgreich sein, wenn Randbedingungen auf Flächen gegeben sind, bei denen eine Koordinate konstant ist
$\rightarrow$ aus Randflächen ergibt sich die Wahl des KS

Kartesisches KS: $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

Ansatz: $\phi(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$

$$\Rightarrow \quad \Delta\phi = 0 = \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial z^2} \quad \Big| \cdot \frac{1}{X(x)Y(y)Z(z)}$$

Separation der Variablen

$$0 = \underbrace{\frac{1}{X(x)}\,\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{\substack{\text{nur von } x \\ \text{abh.} \\ -\alpha^2}} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\cdot\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}_{\substack{\text{nur von } y \\ \text{abh.} \\ -\beta^2}} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)}\,\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}_{\substack{\text{nur von } z \\ \text{abh.} \\ \gamma^2}}$$

$$\frac{1}{X(x)}\cdot\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 \longrightarrow \{\cos(\alpha x),\ \sin(\alpha x)\} \quad (\alpha \neq 0)$$

Y genauso

$$\frac{1}{Z(z)}\cdot\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 \longrightarrow \{e^{\gamma z},\ e^{-\gamma z}\} \quad (\lambda \neq 0)$$

Anmerkung: • Vorzeichen von α, β, γ (egal), aber beeinflussen die Lösung

• $\alpha = 0 \longrightarrow X(x) = Ax + B$ (vgl. Ü5)

• Die allg. Lösung der Laplace-Gl. entsteht durch Überlagerung aller Einzellösungen $\phi_{allg.} = \sum_i c_i \phi_i$

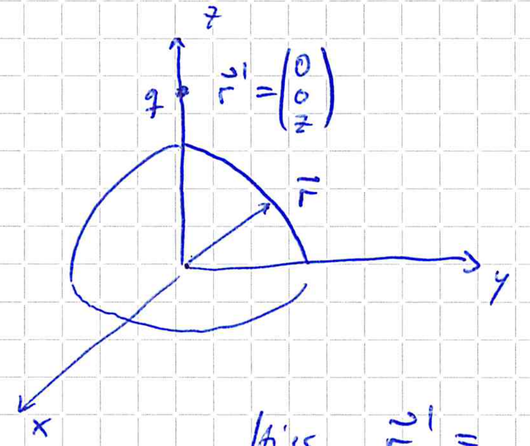
• Die Koeffizienten c_i werden durch die Randbedingungen bestimmt (evtl. Reihenansatz, vgl. A 16)

Aufgabe 15:

Geg.: q im Punkt $(0,0,z)$. $z > R$

Ges.: ϕ_D

$\hookrightarrow \dfrac{\sum \text{Potential} \cdot (\text{Fläche des Potentials})}{\text{Ges.-Oberfläche der Kugel}} \sim 4\pi R^2$



Potential am Ort $\vec{r}$ einer Punktladung: $\phi(\vec{r}) = \dfrac{q}{4\pi \varepsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$

Hier $\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{r} = R \cdot \vec{e}_r = R \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$\|\vec{r} - \vec{r}\,'\| = \left\| R \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{R^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + R^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + (R\cos\vartheta - z)^2}$$

$$= \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\vartheta}$$

$$\phi_D = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\vartheta}}\, df \quad \Big| \quad df = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\phi_D = \frac{1}{4\pi \cancel{R^2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{q\, \cancel{R^2} \sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\vartheta}}\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{q}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\vartheta}} \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$\phi_D = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{Rz}\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos\vartheta}\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{q}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R\cdot z}\left(\underbrace{\sqrt{(R+z)^2}-\sqrt{(z-R)^2}}_{R+z-z+R=2R}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z} = \phi(\vec{0})$$

$\Rightarrow$ Allgemein: Im ladungsfreien Raum ($\Delta\phi = 0$, $\varrho = 0$) ist das Potential gleich dem Mittelwert des Potentials seiner Nachbarpunkte.

Aufgabe 16:

Geg.: Randbedingungen: $\phi = 0$ für $y = 0$ und $y = a$

$\phi = V_0$ für $x = 0$

$\phi \to 0$ für $x \to \infty$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}}_{=0}$$

Ansatz: $\phi(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 X(x)\cdot Y(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)\,Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$Y(y) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \quad \Big| : X(x) \Big| : Y(y)$$

Separation $\downarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{\text{nur von } x \text{ abh.}} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 (Y(y))}{\partial y^2}}_{\text{nur von } y \text{ abh.}} = 0$$

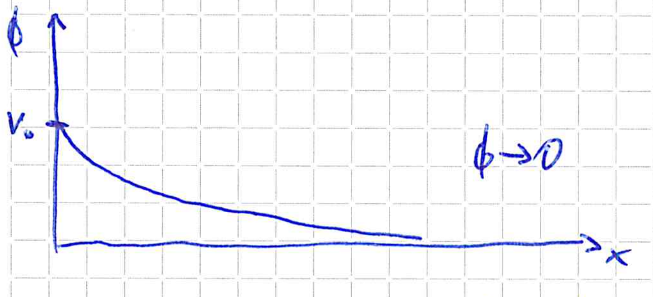
$$C_1 + C_2 = 0$$

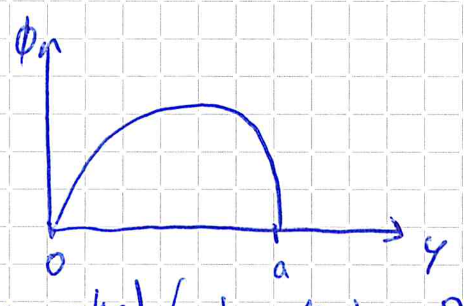
$\rightarrow$ C_1, C_2 haben unterschiedliche Vorzeichen

$\rightarrow$ $C_1 = k^2$, $C_2 = -k^2$ $\quad$ ($C_1 = -k^2$, $C_2 = k^2$)

I) $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = k^2 \longrightarrow X = A e^{kx} + B e^{-kx}$

II) $\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k^2 \longrightarrow Y = C \sin(ky) + D \cos(ky)$





$$\Rightarrow \phi(x,y) = X(x) \cdot Y(y) = (\underbrace{A}_{=0} e^{kx} + B e^{-kx})(C \sin(ky) + D \cos(ky))$$

$= 0$, sonst nicht $\phi \to 0$ für $x \to \infty$ $\forall y$

$$\phi(x,y) = B\, e^{-kx} \left(C \sin(ky) + D \cos(ky) \right)$$

$C_{neu} = B \cdot C$

$D_{neu} = B \cdot D$

$$= e^{-kx} \left(C' \sin(ky) + D \cos(ky) \right)$$

$$\phi(x, y=0) = e^{-kx} \left(C' \underbrace{\sin(0)}_{=0} + D \underbrace{\cos(0)}_{=1} \right) = e^{-kx} \cdot D \overset{!}{=} 0 \quad \forall x$$

$= 0$

$$\boxed{D = 0}$$

$$\phi(x,y) = C' \cdot e^{-kx} \sin(ky)$$

$$\phi(x, y=a) = C' e^{-kx} \sin(ka) \overset{!}{=} 0$$

$= 0$

$C = 0$ dann $\phi = 0$

$\sin(ka) = 0$

$$\sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$$

Letzte Randbedingung: $\phi(x=0,\ 0<y<a) \overset{!}{=} V_0$

$$\phi(0,y) = + C \cdot \underbrace{e^{-\frac{n\pi}{a}x}}_{=1} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \overset{!}{=} V_0 \quad ; \forall\ 0<y<a$$

Problem: sin nicht konst. $\rightarrow$ so nicht lösbar!

Aber: Wegen Linearität der Laplace-Gl. gilt:

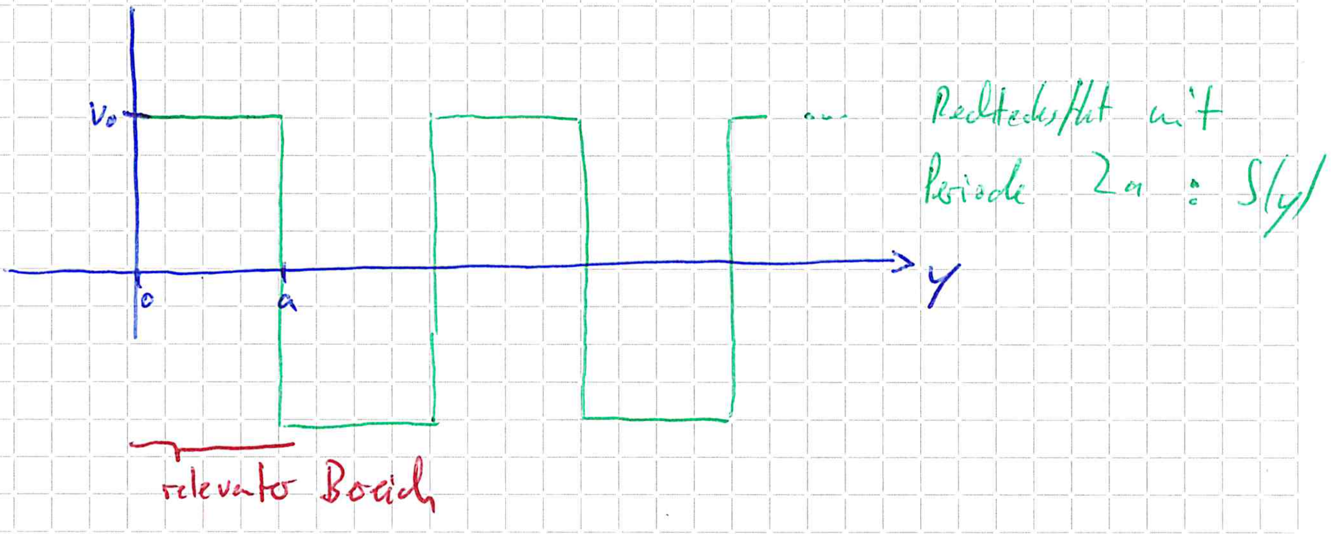
Wenn $\phi_1(x,y)$ und $\phi_2(x,y)$ Lösungen sind ist auch $\phi_1(x,y) + \phi_2(x,y)$ eine Lösung der Laplace-Gl.!

$$\rightarrow \phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$\phi(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \rightarrow$$ Koeffizienten C_n so wählen, dass RB erfüllt!

→ Entspricht der Suche von Koeffizienten einer Fourierreihe.

Wegen $\sum \sin(..)$ können nur ungerade Fkt. dargestellt werden:



Math. FS → Fourierreihe für Rechtecksfkt. mit Periode 2a und Amplitude b

$$R(x) = \frac{4b}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{a}x\right)}{2k+1}$$

$$S(y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{a}y\right)}{2k+1} \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$\Rightarrow$ $C_n = 0$ für $n = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$, gerades n

$C_n = \frac{4V_0}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ $n = 2m+1$ $(m \in \mathbb{N})$, ungerades n

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$