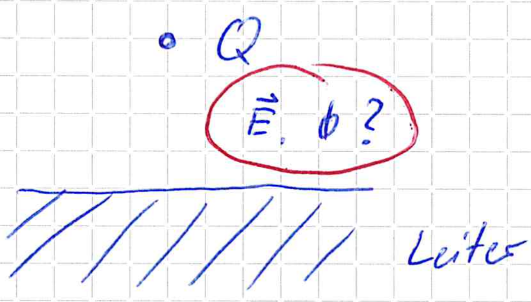
Felder und Wellen Übung 7:

Einleitung: Lösen der Laplace-Gleichung mit Separationsansatz

1) Wahl des Koordinatensystems
2) $\Delta \Phi(x,y,z) = 0 \rightarrow$ Ansatz: $\phi(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$
3) Einsetzen der DGL und separieren
4) Allg. Lösung unter Berücksichtigung der Randbedingungen
5) Spezielle Lösung durch Überlagerung der partikulären Lösungen $\rightarrow \phi = \sum_i c_i \cdot \phi_i$

<u>Spiegelungsmethode:</u> Methode, um el. Feld und Potential zu berechnen, wenn Ladungsverteilung und spezielle Leiter gegeben.

<u>Bsp.:</u>



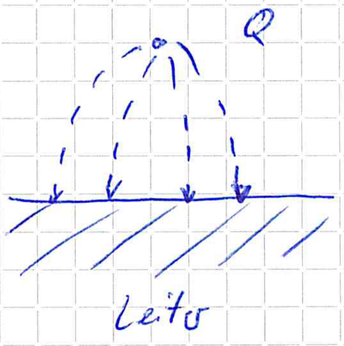
Warum liegt andere Situation vor als ohne Leiter?

$$\oiint \vec{D}\, d\vec{F} = \iiint \rho \, dv$$ gültig? Ja!

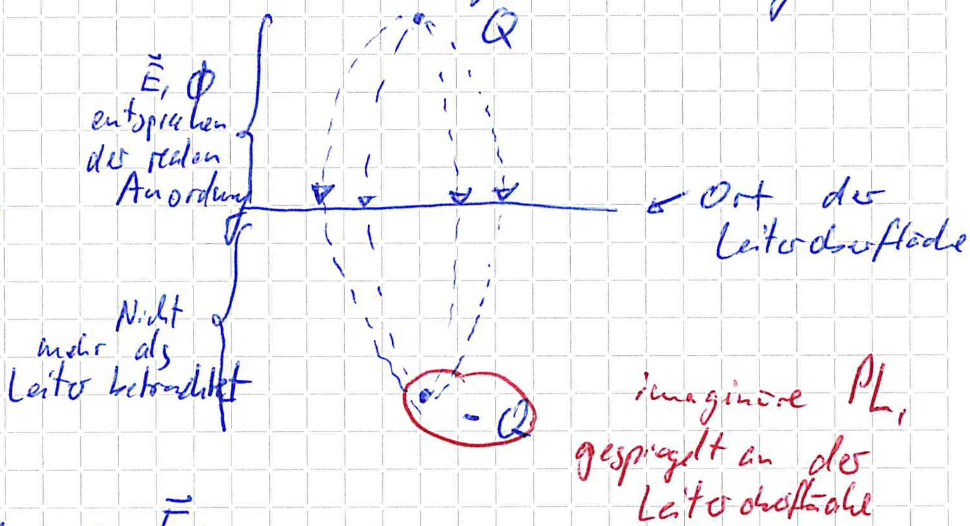
Aber: $\cancel{\vec{D} = D_r \cdot \vec{e}_R}$ falsch, keine kugelsymm. Anordnung!

Im Leiter gilt: $\vec{E} = 0$, außerdem $E_{t,\text{außen}} = E_{t,\text{innen}} = 0$

$\Rightarrow \vec{E} \perp$ Leiteroberfläche



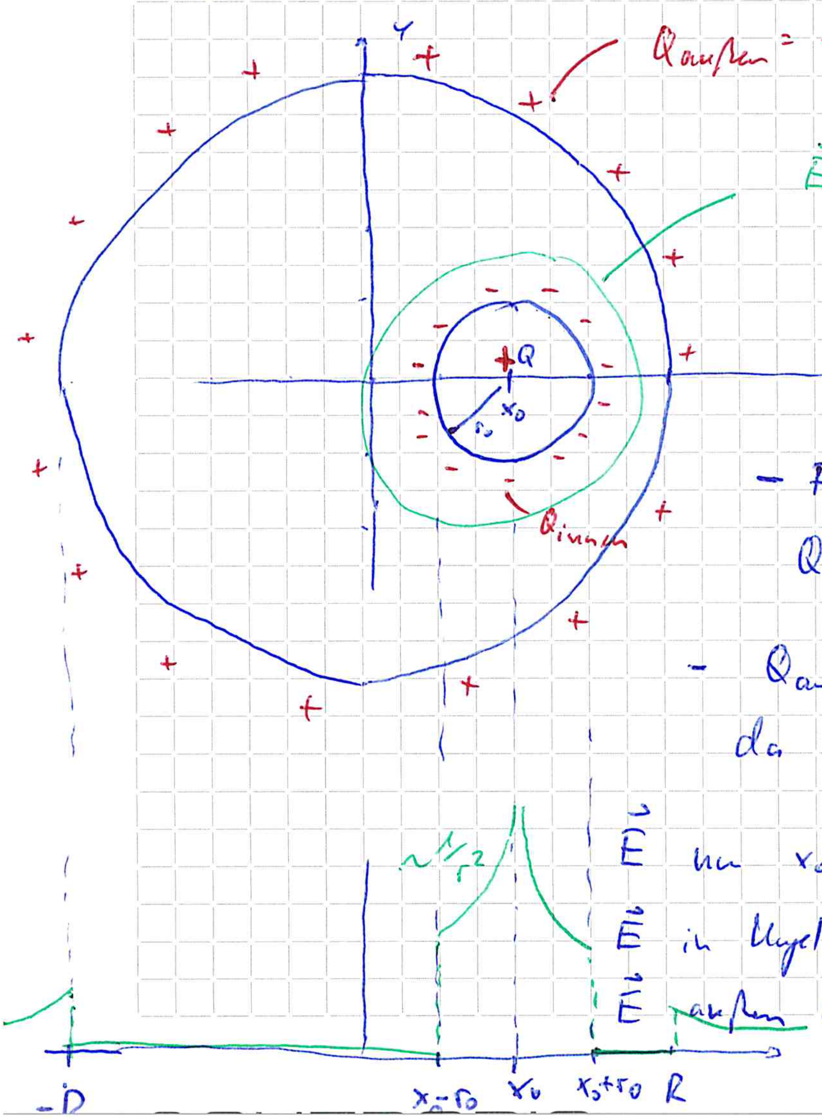
Imaginäre Anordnung:



$$\vec{E}_{\text{dran}} = \vec{E}_{\text{Punktladung}} + \vec{E}_{\text{imaginäre PL}}$$

$$\Phi_{\text{dran}} = \phi_{PL} + \phi_{\text{imag. PL}}$$

Aufgabe 17:



$Q_{außen} = -Q_{innen}$, $Q_{außen} + Q_{innen} = 0$

$\vec{E} = 0$ (idealer Leiter) $\rightarrow \oint \vec{D}\, d\vec{F} = 0$

$\Rightarrow \iiint \rho\, dv = 0$

$\Rightarrow Q_{ges} = 0$

– Flächenladungsdichte bei r_0 gleicht Q gerade aus $Q_{innen} = -Q$

– $Q_{außen}$ verteilt sich gleichmäßig, da $Q = -Q_{innen}$

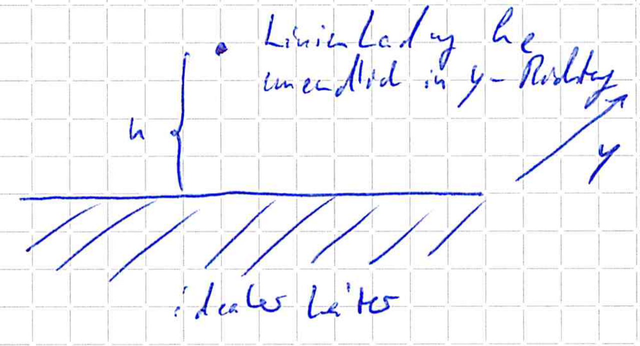
$\vec{E}$ um x_0 = $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$ (KS um x_0 zent.)

$\vec{E}$ in Kugel (idealer Leiter) $\Rightarrow \vec{E} = 0$

$\vec{E}$ außen: $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$ (KS im Ursprung zentriert)

Aufgabe 18: Ges.: $\vec{E}$, ϕ im Raum

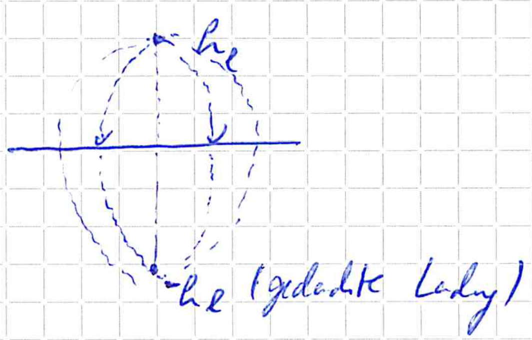
σ auf Leiteroberfläche



In Elektrostatik: $\vec{E} = 0$ im idealen Leiter → $\vec{E} \perp$ Leiteroberfläche

Welche Anordnung würde ein solches $\vec{E}$-Feld erzeugen?

→ gespiegelte Anordnung:



Wo ist die Ladung in Wirklichkeit?

Zur Lösung der Aufgabe: Betrachte gedachte, gespiegelte Anordnung („Spiegelungsmethode")

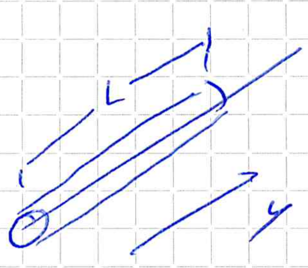
→ Berechne $\vec{E}$-Feld der beiden Linienladungen (Satz von Gauß)

→ Überlagerung der einzelnen Felder

$$\oint \vec{D}\, d\vec{f} = \iiint \rho\, dv$$

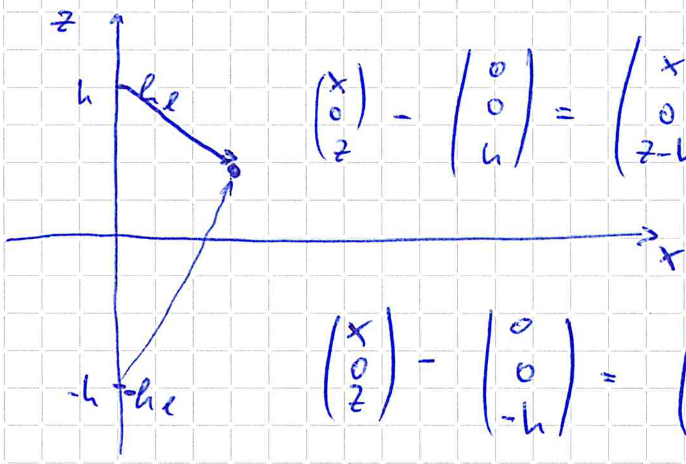
$$2\pi \cancel{L} \cdot R\, D_R = \rho_\ell \cdot \cancel{L}$$

$$\Rightarrow D_R = \varepsilon E_R = \frac{\rho_\ell}{2\pi R}$$



$$E_R = \frac{\rho_\ell}{2\pi \varepsilon R} \qquad \vec{E} = E_R \vec{e}_R$$

Zylindersymmetrie für eine Linienladung



$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z-h \end{pmatrix} \qquad R_1 \hat{=} \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z-h \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + (z-h)^2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z+h \end{pmatrix} \qquad R_2 \hat{=} \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z+h \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + (z+h)^2}$$

$$D(x,z) = \frac{\rho_\ell}{2\pi \cdot \sqrt{x^2 + (z-h)^2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z-h \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}}}_{= \vec{e}_{R_1}} +$$

$$+ \frac{-\rho_\ell}{2\pi \cdot \sqrt{x^2 + (z+h^2)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z+h \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}}}_{= \vec{e}_{R_2}}$$

$$\vec{D}(x,z) = \frac{\rho_\ell}{2\pi} \left[\frac{1}{x^2 + (z-h)^2} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z-h \end{pmatrix} - \frac{1}{x^2 + (z+h)^2} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z+h \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x,z) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \vec{D}(x,z)$$

Im Leiter: $\vec{D} = \vec{E} = 0$

Grenzflächen: $D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma$, $\vec{D} = 0$ (im Leiter)

$\rightarrow D_{n,\text{außen}}(z=0) = \sigma$

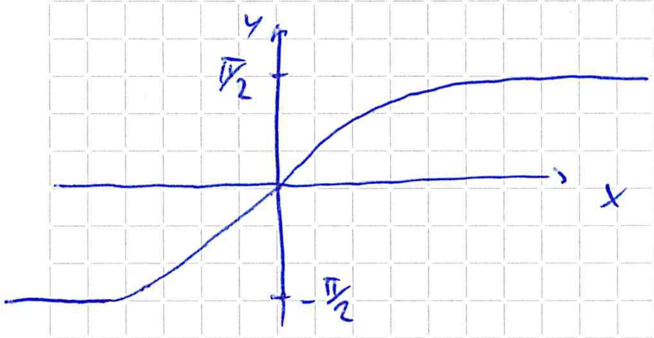
$$\vec{D}(x, z=0) = \frac{q_l}{2\pi}\left[\frac{1}{x^2+(-h)^2}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} - \frac{1}{x^2+h^2}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ h \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{q_l}{2\pi(x^2+h^2)}\left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ h \end{pmatrix}\right] = -\frac{q_l \cdot h}{\pi(x^2+h^2)} \cdot \vec{e}_z = \sigma(x)$$

<u>Ges</u>: Ladung pro Länge auf Leiteroberfläche:

$$Q = \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x)\, dx\, dy = L \cdot \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{q_l \cdot h}{\pi(x^2+h^2)}\, dx$$

$$= L \cdot \frac{-q_l}{\pi} \cdot h \left[\frac{1}{h}\arctan\left(\frac{x}{h}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = \boxed{*}$$



$$\boxed{*} = L \cdot \frac{-q_l}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -q_l \cdot L$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q}{L} = -q_l$$

Ges.: ϕ

- Berechnung aus $\phi_2 - \phi_1 = -\int \vec{E} d\vec{s}$ (schwierig, welcher Integrationsweg?)
- Berechnung als $\phi = \phi_1 + \phi_2$ (leichter)

Potential der Linienladung — Potential der gedachten Spiegelungsladung

$$\phi_1(R_1) = \int E_{e_1} \, dR_1 = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \ln(R_1) + C_1$$

$$\phi_2(R_2) = \;\; ... \;\; = -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \ln(R_2) + C_2$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + C$$

$\phi(\infty) = 0$ (Normierung)

$$\phi(\infty) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \ln(1) + C \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = 0$$

da $R_1 \to R_2$, für $R \to \infty$

$$R_1 = \sqrt{x^2 + (z+h)^2} \qquad R_2 = \sqrt{x^2 + (z-h)^2}$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+(z+h)^2}}{\sqrt{x^2+(z-h)^2}}\right)$$