

Felder und Wellen

WS 2015/2016

Musterlösung zur 7. Übung

17. Aufgabe

Das $\vec{E}$ -Feld im Hohlraum wird im lokalen, auf den Mittelpunkt des Hohlraums zentrierten Koordinatensystem berechnet. Das Potential ist im Leiter konstant, also auch auf der Oberfläche des Hohlraumes konstant. Damit ist das Potential im Hohlraum eindeutig definiert und der Hohlraum kann gesondert betrachtet werden. Eine Lösung des Problems : "Punktladung im Mittelpunkt eines kugelförmigen Hohlraumes mit konstantem Potential auf der Hohlraumoberfläche" ist:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} + C$$

Wegen der Eindeutigkeit des Potentials ist das auch die einzige Lösung. Für $r' < r_0$ folgt daraus

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{e}_{r'}$$

Im idealen Leiter muß das $\vec{E}$ -Feld 0 sein. Wird eine kugelförmige Fläche direkt unterhalb der Oberfläche der Kugel betrachtet, ist das $\vec{E}$ -Feld überall auf der Fläche gleich Null. Es gilt der Satz vom Hüllenfluß

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int \varrho dv$$

Also muß die eingeschlossene Ladung gleich Null sein. Auf der Oberfläche des Hohlraums existiert also eine Flächenladung der Gesamtstärke $-Q$. Die leitende Kugel an sich ist aber ungeladen und auf konstantem Potential. Deshalb verteilt sich die Ladung Q gleichmäßig auf der Oberfläche und erzeugt für $r > R$ ein Punktladungsfeld.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{für } r > R$$

18. Aufgabe

Spiegelungsmethode: Das Feld der Linienladung bewirkt eine Influenzladungsdichte auf der Oberfläche des leitenden Halbraumes.

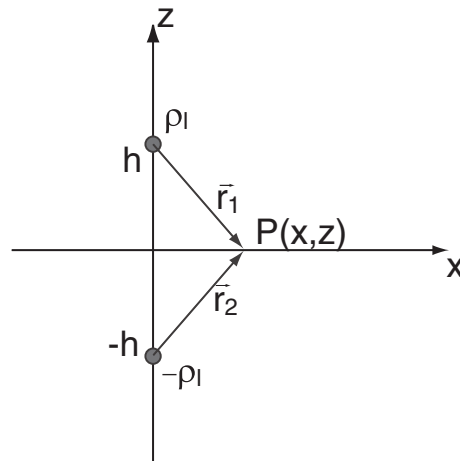
Über die Eigenschaften des elektrischen Feldes an Grenzflächen zwischen Leitern und Nichtleitern können allgemeine Aussagen gemacht werden. Es gelten die Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} D_{n_2} - D_{n_1} &= \sigma \\ E_{t_2} - E_{t_1} &= 0 \end{aligned}$$

Der untere Halbraum ist ein idealer Leiter. Im Leiter existieren keine Felder, aber auf der Randfläche sitzt die Flächenladung σ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} D_{n_1} &= \sigma \\ E_{t_1} &= 0 \end{aligned}$$

Die elektrische Verschiebungsdichte und das elektrische Feld stehen also senkrecht auf der Leiteroberfläche. Im Leiter gilt $\Phi = 0$, da das Potential im Leiter konstant sein muß, und der Leiter sich bis ins Unendliche erstreckt (dort gilt $\Phi = 0$). Nach der Spiegelungsmethode soll die Flächenladungsdichte σ durch eine Ladung an geeigneter Stelle ersetzt werden, so dass $\Phi = 0$ auf dem Leiter erfüllt ist, und das resultierende Gesamtfeld nur eine orthogonale Feldkomponente auf der Leiteroberfläche hat. Aus der Symmetrie des Problems folgt, dass eine Linienladung mit $-\rho_l$ an der Position $z = -h$ ein geeignetes Potential und Feld erzeugt, da sie von jedem Punkt der xy -Ebene denselben Abstand wie die ursprüngliche Ladung hat. Es wird daher zunächst allgemein das



Feld und Potential einer Linienladung im Ursprung berechnet. Anschließend werden die Felder und Potentiale zweier Linienladungen überlagert. Das Elektrische Feld der Linienladung wird mit dem Gauß'schen Satz (Satz vom Hüllenfluß) in einem lokalen Zylinderkoordinatensystem mit der z -Achse entlang der Linienladung berechnet.

$$Q = \oint \vec{D} d\vec{f}$$

Das $\vec{D}$ -Feld ist radial nach außen gerichtet und auf einer Zylindermantelfläche mit Radius r konstant.

$$\vec{D} = D_r(r) \vec{e}_r$$

Es wird ein Zylinder der Länge l betrachtet, der die Ladung ql umschließt.

$$2\pi r l D_r = ql$$

Diese Gleichung kann durch l geteilt werden, das Problem ist de facto zweidimensional.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{D} &= \frac{ql}{2\pi r} \vec{e}_r \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{ql}{2\pi r \epsilon} \vec{e}_r\end{aligned}$$

Das Potential wird über die Gleichung

$$\Phi = - \int \vec{E} d\vec{s}$$

Berechnet. Hier wird zunächst mit einem unbestimmten Integral gerechnet, da man als Lösung eine Logarithmusfunktion erhält, die weder im Unendlichen noch im Ursprung konvergiert. Die Integrationskonstante wird daher später bestimmt.

Φ kann wegen der Symmetrie des Problems ebenso wie $\vec{E}$ nur von r abhängen. Das ergibt folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}\Phi &= - \int E_r dr = - \int \frac{ql}{2\pi r \epsilon} dr \\ \Phi &= - \frac{ql}{2\pi \epsilon} \ln r + C\end{aligned}$$

Die Konstante C kann noch nicht berechnet werden. Das Potential divergiert im Unendlichen, wie auch zu erwarten war, schließlich ist die Ladung unendlich (nämlich $Q = ql \cdot \infty$). Das Zwischenergebnis macht trotzdem Sinn, nur das Potential von Linienladung + Ladung auf dem Leiter muß im Unendlichen gegen null gehen. Die bisherigen Überlegungen berücksichtigen den leitenden Halbraum nicht. Für das Potential gilt $\Phi = 0$ für $z \leq 0$. Für $z > 0$ gilt bei Überlagerung der Potentiale beider Linienladungen:

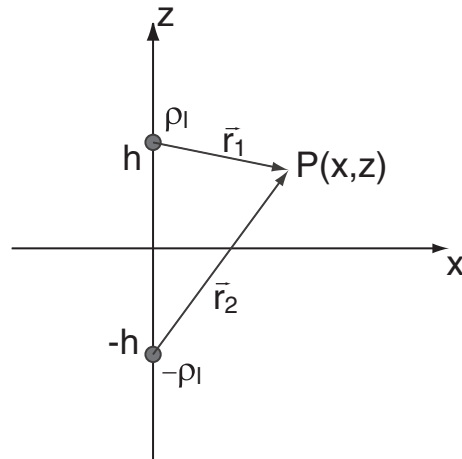
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{ql}{2\pi \epsilon} \ln r_1 + C_1 + \frac{ql}{2\pi \epsilon} \ln r_2 + C_2 = \frac{ql}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + C$$

Wobei im letzten Schritt die beiden Konstanten zu Einer zusammengefaßt wurden. Diese Konstante muß so bestimmt werden, daß $\Phi = 0$ für $r \rightarrow \infty$ gilt. Für große r geht $\frac{r_2}{r_1}$ gegen 1. Daraus folgt $C = 0$ (zweite Möglichkeit: in der xy -Ebene ist $r_1=r_2$, aus $\Phi = 0$ folgt dann ebenfalls $C = 0$). Für die weitere Rechnung wird das Potential in kartesischen Koordinaten benötigt.

$$\begin{aligned}r_2 &= \sqrt{x^2 + (z+h)^2} \\ r_1 &= \sqrt{x^2 + (z-h)^2} \\ \Phi(x, z) &= \frac{ql}{2\pi \epsilon} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} \right)\end{aligned}$$

Die von beiden Ladungen erzeugte elektrische Verschiebungsdichte ist gleich

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{ql}{2\pi r_1} \vec{e}_{r_1} - \frac{ql}{2\pi r_2} \vec{e}_{r_2}$$



$$\vec{e}_{r_1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} \vec{e}_x + \frac{z-h}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_{r_2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}} \vec{e}_x + \frac{z+h}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}} \vec{e}_z$$

Auf der Leiteroberfläche ($z = 0$) ergibt dies

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{\rho_l}{2\pi} \left(\frac{\vec{e}_{r_1}}{r_1} - \frac{\vec{e}_{r_2}}{r_2} \right) \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi} \left(\frac{x\vec{e}_x - h\vec{e}_z}{x^2 + h^2} - \frac{x\vec{e}_x + h\vec{e}_z}{x^2 + h^2} \right) \\ &= \frac{-\rho_l h}{\pi(x^2 + h^2)} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sigma = \frac{-\rho_l h}{\pi(x^2 + h^2)}$$

Durch Integration von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ wird die Ladung pro Längeneinheit auf der Leiteroberfläche berechnet.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\rho_l h}{\pi(x^2 + h^2)} dx = \frac{-\rho_l h}{\pi} \frac{\pi}{h} = -\rho_l$$

Die Influenzladung ist gleich der Linienladung, was auch zu erwarten war.