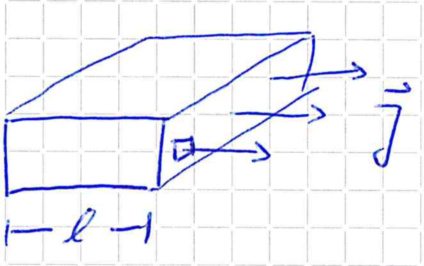
Felder und Wellen Übung 8:

Bisher: Elektrostatik: Ladungen bewegen sich nicht → $\vec{E}, \vec{D}, \phi$ zeitl. konstant

Jetzt: Stationäre Ströme: Bewegte Ladungen, aber zeitlich konstantes $\vec{J}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \phi$

Begriffe: Stromdichte $\vec{J} := \frac{\Delta I}{\Delta F} \cdot \vec{n}_F$



Ohmsches Gesetz: $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$, $I = \frac{U}{R}$

κ: el. Leitfähigkeit $\left[\frac{1}{\Omega m}\right]$ $\quad R = \frac{l}{F} \cdot \frac{1}{\kappa}$

Bei stationären Strömen gelten die Gleichungen der Elektrostatik unverändert. Zusätzlich entsteht aber noch ein Magnetfeld.

Magnetisches Feld:

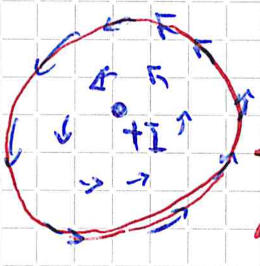
Ursache: Freie Ströme ($\vec{J}$) (und zeitlich veränderliches $\vec{D}$-Feld vorerst nicht betrachtet)

Maxwell: $\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{= 0 \text{ (momentan)}}$ $\qquad$ vgl. $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

$\downarrow$ Stokes $\qquad\qquad$ $\downarrow$ Gauß

$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \underbrace{\iint_F \vec{J}\, d\vec{f}}_{\text{Gesamtstrom durch Fläche}}$ $\qquad$ $\oiint \vec{D}\, d\vec{f} = \underbrace{\iiint \rho\, dv}_{Q}$

Beispiel: $+I$ aus Zeichenebene



— sinnvoller Integrationsweg

da $|\vec{H}|$ konstant und $d\vec{s} \parallel \vec{H}$

$\vec{B}$: Mag. Flussdichte, $\vec{H}$: Mag. Feldstärke

Im Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$\vec{A}$: Mag. Vektorpotential, definiert über $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$

Möglichkeiten zur Berechnung von $\vec{B}/\vec{H}$:

- Durchflutungsgesetz: $\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{J}\, d\vec{f}$

Ort der Stromdichte

- Biot-Savart: $B(\vec{r}) = \iiint \dfrac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}\, dv'$

Ort der Flussdichte

- Mag. Vektorpotential: $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$

$$\Big\downarrow \text{ Lösen}$$

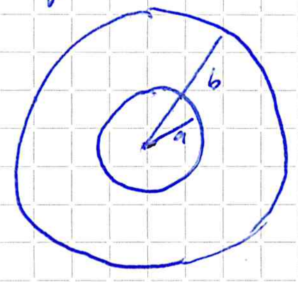
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}\, dv'$$

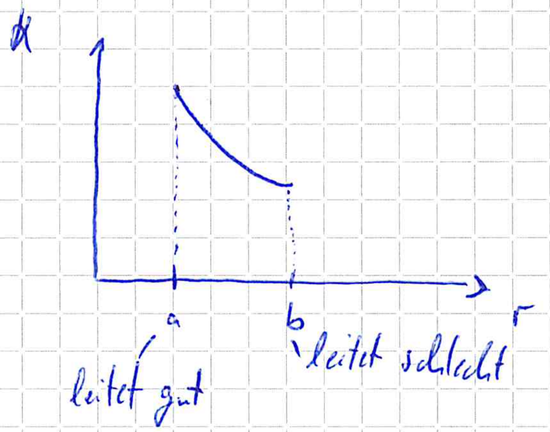
$$\Downarrow$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Es existieren Vereinfachungen für dünne Leiter

Aufgabe 19:





a) Ges.: $\vec{J}$

Es gilt der Strom durch die Kugel mit $r = r_1$ und die Kugel mit $r = r_2$ ist gleich für alle r.

Für beliebiges r: $\iint_{\partial K(r)} \vec{J}\, d\vec{f} = I$

$$\vec{J} = J(r) \cdot \vec{e}_r$$

Weil $\vec{J} \parallel d\vec{f}$, $|\vec{J}|$ konst auf Kugel $\Big\}$ $J(r) \cdot 4\pi r^2 = I$

$$\Leftrightarrow J(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

b) Ges.: $\vec{E}, U$

$$\vec{J}(r) = \kappa(r) \cdot \vec{E}(r) \longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{\vec{J}(r)}{\kappa(r)} = \frac{I / 4\pi \cancel{r^2}\ \vec{e}_r}{\kappa_0 / \cancel{r^2}} = \frac{I}{4\pi \kappa_0} \cdot \vec{e}_r$$

$$U = \underbrace{\phi(a)}_{=U} - \underbrace{\phi(b)}_{0} = -\int_b^a \vec{E}\, \underbrace{d\vec{s}}_{\text{in } e_r\text{-Richtung}} \overset{d\vec{s} = \vec{e}_r \cdot dr}{=} \int_a^b \frac{I}{4\pi \kappa_0}\, dr$$

$$= \frac{I}{4\pi \kappa_0} (b - a)$$

c) Ges.: R $\quad R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi \varkappa_0}(b-a)$

d) Ges.: P, J_r, ϱ als Funktion von U

El. Verlustleistung P:

↳ A) über Verlustleistungsdichte $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$, $P = \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv$

↳ B) direkt aus U, I; $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = \frac{4\pi\varkappa_0}{b-a} U^2$

Stromdichte $J_r(U)$:

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r \rightarrow \text{benötigt: } I(U) \text{ aus } U = \frac{b-a}{4\pi\varkappa_0} I$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{4\pi\varkappa_0}{b-a} U$$

$$\vec{J} = \frac{\frac{4\pi\varkappa_0}{b-a} U}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r = \frac{\varkappa_0 U}{(b-a) r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Raumladungsdichte $\varrho(U)$:

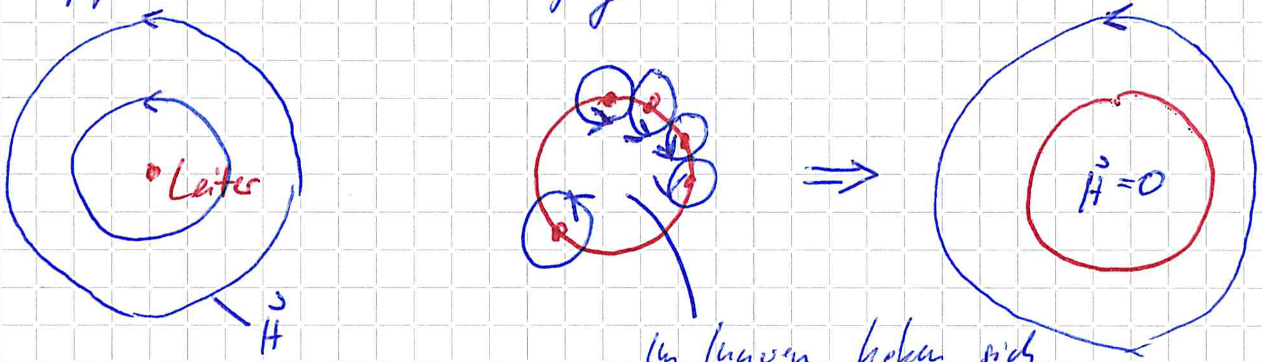
$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho = \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \operatorname{div}\left(\varepsilon \cdot \frac{I}{4\pi\varkappa_0} \vec{e}_r\right)$$

$$= \operatorname{div}\left(\varepsilon \frac{U}{b-a} \cdot \vec{e}_r\right)$$

$$\overset{FS}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \varepsilon \frac{U}{b-a}\right)$$

$$= \varepsilon \frac{U}{b-a} \frac{1}{r^2} \cdot 2r = \frac{2\varepsilon}{r} \cdot \frac{U}{b-a}$$

Aufgabe 20: Vorüberlegung



Im Inneren heben sich die Felder gerade auf

a) Ges.: $\vec H$

$$\underbrace{\oint \vec H \, d\vec s}_{\text{Kreis mit Radius } R} = \underbrace{\iint \vec J \, d\vec f}_{\text{Kreisscheibe (KS) mit Radius } R}$$

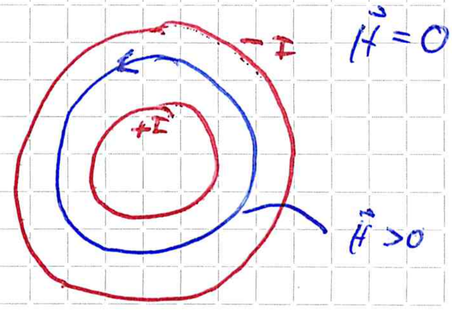
Linke Seite:

$$\oint \vec H \, d\vec s = \int_0^{2\pi} H_\varphi(R) \underbrace{\vec e_\varphi \cdot \vec e_\varphi}_{=1} R \, d\varphi = 2\pi \cdot R \cdot H_\varphi(R)$$

$$\left| \quad \begin{aligned} \vec H &= H_\varphi(R) \cdot \vec e_\varphi \\ d\vec s &= \vec e_\varphi R \, d\varphi \end{aligned} \right.$$

Rechte Seite:

$$\underbrace{\iint_{KS(R)} \vec J \, d\vec f}_{\text{Gesamtstrom durch KS}} = \begin{cases} 0 & \text{für } R < a \\ I & \text{für } a \leq R < b \\ -I + I & \text{für } R \geq b \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad \vec{H} = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ \dfrac{I}{2\pi R} & \text{für} \quad a < R < b \end{cases}$$

b) Ges.: Vektorpotential $\vec{A}$ auf z-Achse

Allg.: $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|} \, dv'$$

Ort der Stromdichte

Ort des Potentials

Wegen unendlicher Ausdehnung in z-Richtung: $\vec{A}(\vec{r})$ auf z-Achse konst.

$$\vec{A}(z \cdot \vec{e}_z) = \vec{A}(\vec{0}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\| \vec{r}\,' \|} = \boxed{*}$$

Problem: Nur I gegeben

Wir wissen: $$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{\infty} j\left(\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} a \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}\right) df' = I \qquad df' = R' d\varphi' \, dR'$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{\infty} j\left(\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} b \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}\right) df' = -I$$

$$\vec{j} = 0 \quad , \text{sonst}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{z} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{\infty} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\| \vec{r}\,' \|} R' dR' \, d\varphi' \, dz'}_{\displaystyle \int \frac{I \vec{e}_z}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{-I \vec{e}_z}{\sqrt{b^2+z^2}}}$$

$$\boxed{*} = \frac{\mu}{4\pi} I \cdot \vec{e}_z \int_{z=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} \right) dz$$

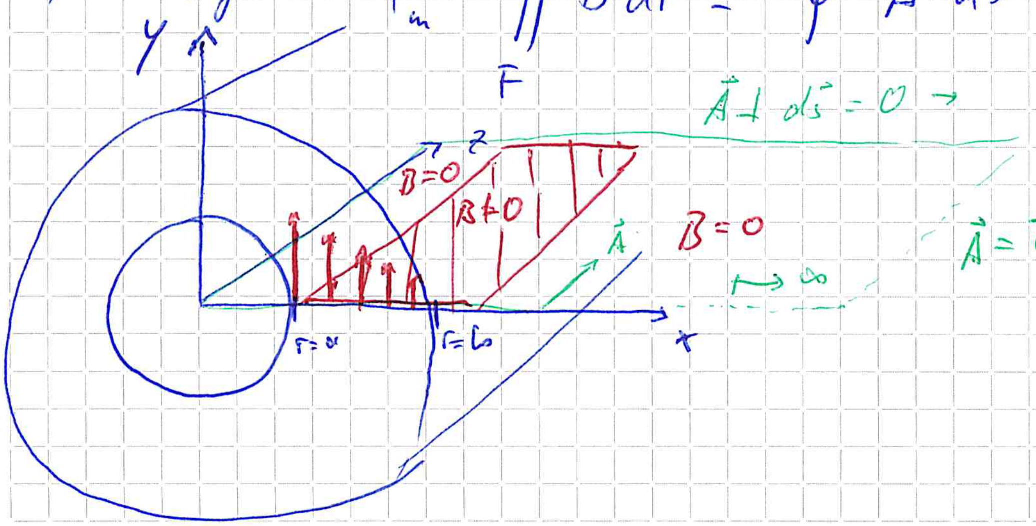
$$= \frac{\mu I \vec{e}_z}{4\pi} \left[\ln\left(z+\sqrt{a^2+z^2}\right) - \ln\left(z+\sqrt{b^2+z^2}\right) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\underset{\ln(a)-\ln(b)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{=} 2 \cdot \frac{\mu I \cdot \vec{e}_z}{4\pi} \left[\ln\left(\frac{z+\sqrt{a^2+z^2}}{z+\sqrt{b^2+z^2}} \right) \right]_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\infty}$$

$$= \frac{\mu I \cdot \vec{e}_z}{2\cancel{4}\pi} \left(\underbrace{\ln(1)}_{\text{für } z\to\infty \ = 0} - \ln\left(\frac{0+a}{0+b}\right) \right)$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \vec{e}_z$$

c) Zu zeigen: $\phi_m = \iint_F \vec{B}\, d\vec{f} = \oint \vec{A}\, d\vec{s}$



Rechte Seite:

$$\oint \vec{A}\, d\vec{s} = \int_{-l}^{l} \vec{A}(z)\, \underbrace{\vec{e}_z \cdot dz}_{d\vec{s}} = \int_{-l}^{l} \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \underbrace{\cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{=1} dz$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot 2l$$