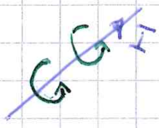
Felder und Wellen Übung 9:

Magnetostatik: $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \cancel{\dot{\vec{D}}}_{=0}$

$\downarrow$

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{J}\, d\vec{f}$$



Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Materie: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

Magnetisierung: Bewegte Ladungen (e^- in Materie) und Ströme $\Rightarrow$ erzeugen mag. Moment

lineare Medien: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$

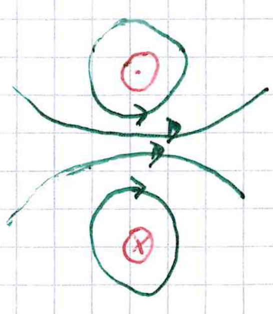
Suszeptibilität $= \mu_0 \mu_r \vec{H}$

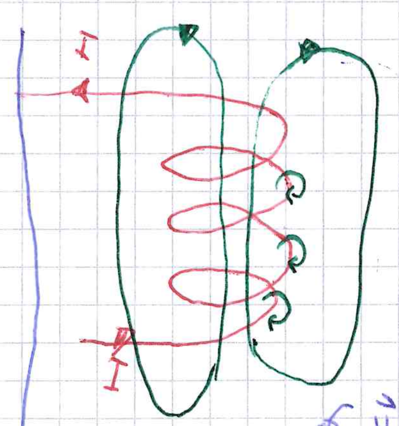
Bedingungen an Grenzflächen:

$B_{n1} = B_{n2}$; $H_{t1} = H_{t2}$ (wenn keine Flächenströme)

Magnetfeld einer Spule

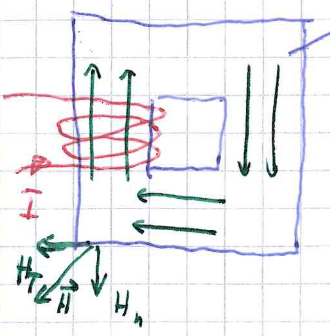
Zuerst: Magnetfeld einer Schleife





$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{J}\, d\vec{f} = N \cdot I$$

Materie verändert Form:



$$B_{n\,Eisen} = B_{n\,Luft} \rightarrow \mu_{r\,Eisen} H_{n\,Eisen} = H_{n\,Luft}$$

$$\rightarrow H_{n\,Eisen} = \frac{1}{\mu_{r\,Eisen}} H_{n\,Luft} \rightarrow$$

$\rightarrow$ Richtung von $\vec{H}$ im Joch entlang des Jochs

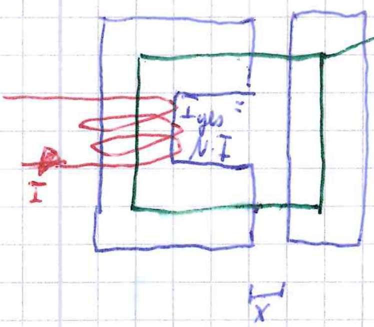
$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \rightarrow \vec{B}$ hauptsächlich im Joch

$\rightarrow$ Integrationsweg im Joch wählen

H innerhalb des Jochs konstant, da sich Querschnitt nicht ändert und $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$

Aufgabe 21

a) Ges.: $\vec{B}$, $\vec{H}$



$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{j}\, d\vec{f}$$

$$\vec{H} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{H}\, d\vec{s} = H \cdot ds$$

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \underbrace{H_{Eisen} \cdot l}_{} + H_{Luft} \cdot 2x = N \cdot I \qquad \boxed{*}$$

l: Länge des Weges im Eisen

Wie ist das Verhältnis zwischen H_{Eisen} und H_{Luft}?

An der Grenzfläche gilt $H_{t1} = H_{t2} \rightarrow \vec{H}$ behält Richtung bei!

Stärke?

$$B_{n\,Eisen} = B_{n\,Luft}$$

$$\mu_0 \mu_{r\,Eisen} H_{n\,Eisen} = \mu_0 \underbrace{\mu_{r\,Luft}}_{\approx 1} \cdot H_{n\,Luft} \rightarrow H_{Luft} = \mu_r H_{Eisen} \quad \boxed{**}$$

$\boxed{**}$ in $\boxed{*}$ $\Rightarrow H_{Eisen} \cdot l + 2x\, \mu_r\, H_{Eisen} = N \cdot I$

$$\Rightarrow H_{Eisen} = \frac{NI}{l + 2x\mu_r}$$

$$H_{Luft} = \frac{\mu_r NI}{l + 2x\mu_r}$$

$$B_{Eisen} = B_{Luft} = \mu_0 H_{Luft} = \mu_0 \mu_r H_{Eisen} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2x\mu_r}$$

b) ges: $W_m(I, x)$; $W_m(\underset{\substack{|\\ \text{mag Fluss}}}{\Phi}, x)$

$$W_m = \underbrace{\iiint w_m \, dV}_{\text{„Energiedichte} \cdot \text{Volumen"}} = w_{m\,Eisen} \cdot V_{Eisen} + w_{m\,Luft} \cdot \underset{\text{Spalt}}{V_{Luft}}$$

$w_{m\,Eisen} = \underbrace{\frac{1}{2} B H_{Eisen}}_{\text{siehe FS}}$; $V_{Eisen} = l \cdot A$

$w_{m\,Luft} = \frac{1}{2} B \cdot H_{Luft}$; $V_{Luft} = 2x \cdot A$

$$W_m = \frac{1}{2} B \left(H_{Eisen} V_{Eisen} + H_{Luft} \cdot V_{Luft} \right) \quad \Big| \; H_{Luft} = \mu_r H_{Eisen}$$

$$= \frac{1}{2} B A H_{Eisen} (l + 2\mu_r x) \quad \Big| \; H_{Eisen} = \frac{NI}{l + 2\mu_r x}$$

$$W_m = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{(NI)}{l + 2\mu_r x}$$

$$= W_m(I, x)$$

Bei konstantem Strom nimmt die Energie im Feld ab, wenn x steigt

$W_m(\Phi, x)$: $\quad \Phi = \iint \vec{B}\, d\vec{f} = B \cdot A = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot N I}{l + 2\mu_r x} \cdot A$

$$\Rightarrow I = \frac{\Phi (l + 2\mu_r x)}{\mu_0 \mu_r N A}$$

$$W_m(\Phi, x) = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l + 2\mu_r x} \cdot \left(\frac{\Phi (l + 2\mu_r x)}{\mu_0 \mu_r N A} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{A \mu_0 \mu_r} (l + 2\mu_r x) \Phi^2$$

c) Ges.: Kraft F auf die Masse

Bei konstantem Strom

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial x}$$

$$W_m = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{(NI)^2}{l + 2\mu_r x}$$

$$F = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{(NI)^2}{(l + 2\mu_r x)^2} (-1 \cdot 2 \cdot \mu_r)$$

$$= -A \mu_0 \mu_r^2 \frac{(N I)^2}{(l + 2\mu_r x)^2}$$

Bei konstantem Fluss

$$F = -\frac{\partial W_m}{\partial x}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{1}{A \mu_0 \mu_r} (l + 2\mu_r x) \cdot \Phi^2$$

$$F = -\frac{1}{2} \frac{1}{A \mu_0 \mu_r} \cdot 2\mu_r \Phi^2$$

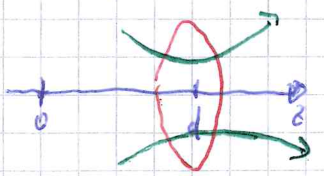
$$= -\frac{1}{\mu_0 A} \left(\frac{\mu_0 \mu_r A N I}{l + 2\mu_r x} \right)^2$$

$$= -A \mu_0 \mu_r^2 (N I)^2 \cdot \frac{1}{(l + 2\mu_r x)^2}$$

Richtung der Kraft: Entlang der neg. x-Achse $\rightarrow$ Masse wird angezogen.

Aufgabe 22

a) Ges.: $\vec{B}$ auf z-Achse einer einzelnen Schleife bei $z = d$



Wie kann man $\vec{B}$ berechnen?

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{j}\, d\vec{f}$$

↳ kein sinnvoller Integrationsweg zu finden. Würde $\vec{B}$ nicht auf ganzer z-Achse liefern!

Gesetz von Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, dV'$$ (prinzipiell möglich)

Etwas einfacher: Gesetz von Biot-Savart für Linienleiter

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r}$: Ort des $\vec{B}$-Felds

$\vec{r}\,'$: Ort des Stromes

$\vec{r} = z \cdot \vec{e}_z$; $\vec{r}\,' = a\, \vec{e}_r + \varphi' \vec{e}_\varphi + d\, \vec{e}_z$

$\vec{r} - \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} -a \\ -\varphi' \\ z-d \end{pmatrix}$; $|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{a^2 + (z-d)^2}$

$d\vec{s} = a\, d\varphi'\, \vec{e}_\varphi$

$$\vec{B}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a\, d\varphi'\, \vec{e}_\varphi \times (-a\, \vec{e}_R - \varphi' \vec{e}_\varphi + (z-d)\, \vec{e}_z)}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}}$$

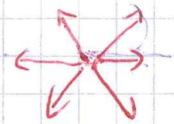
$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_R = -\vec{e}_z$

$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\varphi = 0$

$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_R$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \left[\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a^2 \vec{e}_z}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}}\, d\varphi' + \underbrace{\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a\,(z-d)\, \vec{e}_r}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}}\, d\varphi'}_{=0} \right]$$

$\vec{e}_r(\varphi')$



$$\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \vec{e}_r \, d\varphi' = 0$$

$$\vec{B}\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} = \frac{\mu I}{2} \frac{a^2}{\left(a^2 + (z-d)^2\right)^{3/2}} \vec{e}_z$$

$$= \vec{B}_{z1}(z)$$

b) Ges: $\vec{B}_z(z)$, Feld des Spulenpaars

$$\vec{B}_z(z) = \vec{B}_{z1}(z) + \vec{B}_{z2}(z) \quad \Big| \quad \vec{B}_{z2}(z) = \vec{B}_{z1}(z)$$ aber mit "d" → "$-d$"

$$= \frac{\mu I a^2}{2} \left[\frac{1}{\left(a^2 + (z-d)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(a^2 + (z+d)^2\right)^{3/2}} \right] \vec{e}_z$$