

Felder und Wellen

WS 2015/2016

Musterlösung zur 9. Übung

21. Aufgabe

a) Nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = NI$$

$$H_E l + 2H_L x = NI$$

$\vec{B}$ steht senkrecht auf allen Grenzflächen

$$B_E = B_L = B$$

$$H_L = \frac{B}{\mu_0}$$

$$H_E = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

In das Umlaufintegral eingesetzt

$$Bl + 2\mu_r Bx = \mu_0 \mu_r NI$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2\mu_r x}$$

Daraus folgen die magnetischen Feldstärken

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu_r NI}{l + 2\mu_r x} = \mu_r H_E$$

$$H_E = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{NI}{l + 2\mu_r x}$$

b) Die Energiedichte der magnetischen Feldenergie ist

$$w_m = \frac{1}{2}BH$$

Die Gesamtenergie ist also

$$\begin{aligned} W &= \int w_{mL} dv + \int w_{mE} dv \\ &= \frac{1}{2} \int BH_L dv + \frac{1}{2} \int BH_E dv \end{aligned}$$

B und H sind im Eisen und im Luftspalt über die Länge konstant

$$W = \frac{1}{2}(lABH_E + 2xABH_L)$$

$$H_L = \mu_r H_E$$

$$\begin{aligned} W_m(I, x) &= \frac{1}{2}ABH_E(l + 2\mu_r x) \\ &= \frac{1}{2}A\mu_0\mu_r(NI)^2 \frac{l + 2\mu_r x}{(l + 2\mu_r x)^2} \\ &= \frac{1}{2}A\mu_0\mu_r(NI)^2 \frac{1}{l + 2\mu_r x} \end{aligned}$$

Nun noch $W_m(\phi, x)$ für gleichbleibenden Fluss und variablen Abstand.

$$\begin{aligned} W_m(\phi, x) &= \frac{1}{2}ABH_E(l + 2\mu_r x) \\ &= \frac{1}{2}AB \frac{B}{\mu_0\mu_r} (l + 2\mu_r x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{A\mu_0\mu_r} (l + 2\mu_r x) \end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Darstellungen der Energie miteinander, stellt man fest, dass die magnetische Energie $W_m(I, x)$ bei konstantem Strom mit steigendem x abnimmt. In diesem Fall wird von den Quellen (Batterie) gefordert, dass die Ströme konstant gehalten werden, entweder durch Energieabgabe in das System, oder durch Energieaufnahme aus dem System.

$W_m(\phi, x)$ beschreibt hingegen den Fall, bei dem die Quellen nicht gegen eine Änderung des Flusses, bzw. eine dadurch induzierte Spannung arbeiten müssen. In diesem Fall findet kein Energieaustausch mit den Quellen statt. Die magnetische Energie $W_m(\phi, x)$ hingegen nimmt mit zunehmendem Abstand zu.

Der zweite Fall ist der einfachere. Hier werden die Quellen nicht betrachtet und die Energiebilanz ist nur durch die im Magnetfeld gespeicherte Energie und die zugeführte mechanische Energie $W_{mech} = \int \vec{F} d\vec{s}$ gegeben. Da die Masse angezogen wird, muss bei einer Vergrößerung des Abstandes gegen die Kraft des Elektromagneten gearbeitet werden. Dem System wird also Energie zugeführt. Dies schlägt sich in einer Erhöhung der magnetischen Energie nieder.

Diese Kraft wollen wir nun ausrechnen.

c) Bei konstantem Strom:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial W}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2}A\mu_0\mu_r(NI)^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{l + 2\mu_r x} \\ &= -A\mu_0\mu_r^2(NI)^2 \frac{1}{(l + 2\mu_r x)^2} \end{aligned}$$

Bei konstantem Fluss

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{A\mu_0\mu_r} (l + 2\mu_r x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\phi^2}{A\mu_0\mu_r} 2\mu_r \\ &= -\frac{\phi^2}{A\mu_0\mu_r} \mu_r \end{aligned}$$

Nach Ersetzen des Flusses durch das Feld ergibt sich wieder

$$= -A\mu_0\mu_r^2 (NI)^2 \frac{1}{(l + 2\mu_r x)^2}$$

D.h. die Kraft ist - wie zu erwarten war - negativ, also entgegen der Richtung des Abstandes x . Für eine vorliegende Situation ist die Kraft natürlich die gleiche, egal wie sie ausgerechnet wird. In einem gewählten Arbeitspunkt von I , bzw. dem dazugehörigen ϕ gibt es natürlich nur die Kraft in eine Richtung.

Im Falle $W_m(\phi, x)$ ist dies einfach zu verstehen. (s.o.) Für den Fall $W_m(I, x)$ wird durch die verrichtete Arbeit Energie in das System gesteckt und zusätzlich nimmt die magnetische Energie ab. Das bedeutet, dass die Quellen die überschüssige Energie aufnehmen.

Verwirrend? Stellt man es sich so vor, dass bei $W_m(I, x)$ die magnetische Energie mit abnehmendem Abstand zunimmt, und zusätzlich mechanische Energie frei wird, dann ist es klar, dass die Quellen sowohl für die zunehmende magnetische Energie aufkommen müssen, als auch für das Beschleunigen der Last.

Zusatz:

Für nicht zu kleine x kann folgende Näherung gemacht werden: $l \ll 2\mu_r x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= A\mu_0\mu_r^2 (NI)^2 \frac{1}{4\mu_r^2 x^2} \\ &= \frac{1}{4} A\mu_0 (NI)^2 \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Kraft ist proportional zu $\frac{1}{x^2}$

Zu diesem Ergebnis kommt man auch, wenn man annimmt, dass der Großteil der Energie im Luftspalt ist. (Dort ist das $\vec{H}$ -Feld um den Faktor μ_r größer.)

Für sehr kleine x : $2\mu_r d \ll l$

$$\Rightarrow F = A\mu_0\mu_r (NI)^2 \frac{1}{l^2}$$

Die Kraft ist konstant.

22. Aufgabe

a) Das Gesetz von Biot-Savart für Linienleiter ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r}' = a\vec{e}_R + d\vec{e}_z, \quad \vec{r} = z\vec{e}_z, \quad d\vec{s}' = ad\varphi' e_\varphi$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -a\vec{e}_R + (z - d)\vec{e}_z$$

$$d\vec{s}' \times \vec{r} - \vec{r}' = a^2 d\varphi \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{z1}(z) &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\varphi \vec{e}_z}{(a^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 a^2 I}{(a^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

- b) Das Feld der zweiten Spule folgt aus dem der ersten durch Einsetzen von $-d$ anstelle von d .

$$\vec{B}_2(z) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 a^2 I}{(a^2 + (z + d)^2)^{3/2}}$$

Das Gesamtfeld lautet

$$\vec{B}_z(z) = \vec{B}_{z1}(z) + \vec{B}_{z2}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2} \left\{ \frac{1}{(a^2 + (z + d)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \right\}$$

- c) Die erste Ableitung ergibt

$$\frac{\partial}{\partial z} B_z = -\frac{3\mu_0 a^2 I}{2} \left\{ \frac{z - d}{(a^2 + (z - d)^2)^{5/2}} + \frac{z + d}{(a^2 + (z + d)^2)^{5/2}} \right\}$$

Diese Ableitung wird Null für $z = 0$. (Dies war auch klar, weil das Problem symmetrisch zur x - y -Achse ist und deshalb dort zumindest ein lokales Extremum besitzen kann. Damit ist auch klar, dass alle ungeraden Ableitungen null sind.)

- d) Die zweite Ableitung und gleich $z = 0$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} B_z &= -\frac{3\mu_0 a^2 I}{2} \left\{ \frac{[a^2 + d^2]^{5/2} - \frac{5}{2}(-d)^2[a^2 + d^2]^{3/2} \cdot 2}{(a^2 + (-d)^2)^5} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{[a^2 + d^2]^{5/2} - \frac{5}{2}(+d)^2[a^2 + d^2]^{3/2} \cdot 2}{(a^2 + (+d)^2)^5} \right\} \\ &= -\frac{3\mu_0 a^2 I}{2} [a^2 + d^2]^{3/2} \left\{ \frac{[a^2 + d^2] - 5d^2}{(a^2 + (-d)^2)^5} + \frac{[a^2 + d^2] - 5d^2}{(a^2 + (+d)^2)^5} \right\} \end{aligned}$$

Dieser Term wird null, wenn $[a^2 + d^2] - 5d^2 = 0$ wird. Also bei $d = \frac{1}{2}a$.

Mit diesem Wert ist auch die zweite Ableitung null. Damit sind also die ersten drei Ableitungen null und das Feld ist damit sehr homogen um den Ursprung.

Zusatzaufgabe

- a) Der Schalter S_1 ist geöffnet. Auf die Ladungsträger wirkt bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit nach einer Ladungsverschiebung ein Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\vec{E}} &= \vec{F}_{\vec{B}} \\ Q\vec{E} &= Q(\vec{v} \times \vec{B})\end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{v} \times \vec{B} \\ &= \Omega R \vec{e}_\varphi \times B_0 \vec{e}_z \\ &= \underbrace{\Omega R B_0}_{E_r} \vec{e}_r\end{aligned}$$

Die Potentialdifferenz $\Delta\Phi$ zwischen den Kontakten berechnet sich aus der Differenz der Potentiale

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(R_1) - \Phi(R_2) \\ &= - \int_{R_2}^{R_1} \Omega R B_0 \vec{e}_R dR \\ &= -\Omega B_0 \left[\frac{1}{2} R^2 \right]_{R_2}^{R_1} \\ &= \frac{1}{2} \Omega B_0 (R_2^2 - R_1^2)\end{aligned}$$

Die Flächenladungsdichten berechnen sich zu

$$\sigma = D_{n2} - D_{n1}$$

Damit ergibt sich bei $R = R_1$

$$\begin{aligned}\sigma(R_1) &= D_a(R_1) - D_i(R_1) \\ &= E_r(R_1) \epsilon_0 - 0 \\ &= \Omega R_1 B_0 \epsilon_0\end{aligned}$$

Für $R = R_2$ gilt analog

$$\begin{aligned}\sigma(R_2) &= D_a(R_2) - D_i(R_2) \\ &= 0 - E_r(R_2) \epsilon_0 \\ &= -\Omega R_2 B_0 \epsilon_0\end{aligned}$$

Die Raumladungsdichte wird über die Divergenz des $\vec{D}$ -Feldes bestimmt

$$\begin{aligned}\rho &= \text{div} \vec{D} \\ &= \epsilon_0 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\Omega R B_0 R) \\ &= 2\epsilon_0 \frac{1}{R} \Omega B_0 R \\ &= 2\epsilon_0 \Omega B_0\end{aligned}$$

Die Ladung Q für $R < R_1$ ist 0. Die Ladung für $R = R_1$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} Q(R_1) &= \int \sigma(R_1) df \\ &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \Omega R_1 B_0 \epsilon_0 R_1 d\varphi dz \\ &= 2\pi \epsilon_0 H \Omega R_1^2 B_0 \end{aligned}$$

Die Ladung Q_{innen} berechnet sich aus der Raumladungsdichte

$$\begin{aligned} Q_{innen} &= \int \rho dv \\ &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} 2\epsilon_0 \Omega B_0 R dR d\varphi dz \\ &= 4\pi \epsilon_0 \Omega B_0 H \int_{R_1}^{R_2} R dR \\ &= 2\pi \epsilon_0 \Omega B_0 H (R_2^2 - R_1^2) \end{aligned}$$

Die Ladung für $R = R_2$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} Q(R_2) &= \int \sigma(R_2) df \\ &= - \int_0^H \int_0^{2\pi} \Omega R_2 B_0 \epsilon_0 R_2 d\varphi dz \\ &= -2\pi \epsilon_0 H \Omega R_2^2 B_0 \end{aligned}$$

Die Gesamtladung setzt sich aus den Einzelladungen zusammen

$$\begin{aligned} Q_{gesamt} &= Q(R_1) + Q_{innen} + Q(R_2) \\ &= 2\pi \epsilon_0 H \Omega R_1^2 B_0 + 2\pi \epsilon_0 \Omega B_0 H (R_2^2 - R_1^2) - 2\pi \epsilon_0 H \Omega R_2^2 B_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

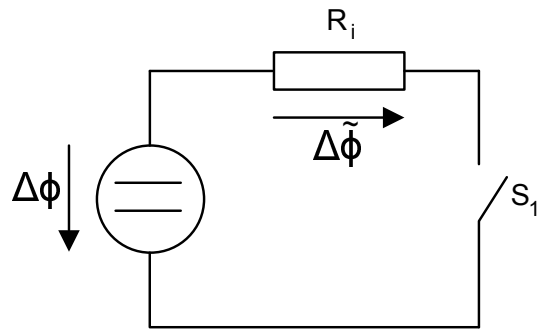
b) Das Ersatzschaltbild:

Der Schalter S_1 ist geschlossen. Es fließt ein Kurzschlussstrom I_k . Das modifizierte $\vec{E}$ -Feld $\vec{\tilde{E}}$ wird über die Stromdichte berechnet

$$\vec{J}(R) = \kappa \vec{\tilde{E}}(R)$$

Die Stromdichte und das modifizierte $\vec{E}$ -Feld besitzen nur eine radiale Komponente

$$\begin{aligned} \vec{J}(R) &= J_R(R) \vec{e}_R \\ \vec{\tilde{E}}(R) &= \tilde{E}_R(R) \vec{e}_R \\ \Rightarrow J_R(R) &= \kappa \tilde{E}_R(R) \end{aligned}$$



Die Stromdichte J_R wird über den Kurzschlussstrom I_k berechnet

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^H \int_0^{2\pi} J_R(R) R d\varphi dz \\ &= 2\pi H R J_R(R) \\ \Rightarrow J_R(R) &= \frac{I_k}{2\pi H R} \end{aligned}$$

Somit kann $\tilde{E}_R$ bestimmt werden

$$\begin{aligned} \tilde{E}_R &= \frac{J_R(R)}{\kappa} \\ &= \frac{I_k}{2\pi H R \kappa} \end{aligned}$$

Die Raumladungsdichte wird über die Divergenz des modifizierten $\vec{D}$ -Feldes bestimmt

$$\begin{aligned} \rho &= \text{div} \vec{D} \\ &= \epsilon_0 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{I_k}{2\pi H R \kappa} R \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die modifizierten Oberflächenladung $\tilde{\sigma}(R_1)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(R_1) &= \tilde{D}_a(R_1) - \tilde{D}_i(R_1) \\ &= \tilde{E}_r(R_1) \epsilon_0 - 0 \\ &= \epsilon_0 \frac{I_k}{2\pi H R_1 \kappa} \end{aligned}$$

Für $R = R_2$ gilt analog

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(R_2) &= \tilde{D}_a(R_2) - \tilde{D}_i(R_2) \\ &= 0 - \tilde{E}_r(R_2) \epsilon_0 \\ &= -\epsilon_0 \frac{I_k}{2\pi H R_2 \kappa} \end{aligned}$$

Die Ladung für $R = R_1$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(R_1) &= \int \tilde{\sigma}(R_1) df \\ &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \epsilon_0 \frac{I_k}{2\pi H R_1 \kappa} R_1 d\varphi dz \\ &= \frac{\epsilon_0 I_k}{\kappa}\end{aligned}$$

Die Ladung für $R = R_2$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(R_2) &= \int \tilde{\sigma}(R_2) df \\ &= - \int_0^H \int_0^{2\pi} \epsilon_0 \frac{I_k}{2\pi H R_2 \kappa} R_2 d\varphi dz \\ &= - \frac{\epsilon_0 I_k}{\kappa}\end{aligned}$$

Die Ladung Q_{innen} ist 0, weil im Innern keine Raumladungsdichte vorhanden ist. Die Gesamtladung setzt sich aus den Einzelladungen zusammen

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{gesamt} &= \tilde{Q}(R_1) + \tilde{Q}_{innen} + \tilde{Q}(R_2) \\ &= \frac{\epsilon_0 I_k}{\kappa} - \frac{\epsilon_0 I_k}{\kappa} \\ &= 0\end{aligned}$$

Die Potentialdifferenz $\Delta\tilde{\Phi}$ berechnet sich aus der Differenz der Potentiale

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\Phi} &= \tilde{\Phi}(R_1) - \tilde{\Phi}(R_2) \\ &= - \int_{R_2}^{R_1} \frac{I_k}{2\pi H R \kappa} dR \\ &= - \frac{I_k}{2\pi H \kappa} [\ln(R)]_{R_2}^{R_1} \\ &= \frac{I_k}{2\pi H \kappa} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

c) Der Schalter S_1 ist geschlossen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Delta\tilde{\Phi} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\Omega B_0(R_2^2 - R_1^2) &= \frac{I_k}{2\pi H \kappa} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \\ \Rightarrow I_k &= \Omega B_0 \pi H \kappa (R_2^2 - R_1^2) \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\end{aligned}$$

Der Innenwiderstand R_i berechnet sich aus der Potentialdifferenz und dem Kurzschlussstrom

$$\begin{aligned}R_i &= \frac{\Delta\tilde{\Phi}}{I_k} \\ &= \frac{1}{2\pi H \kappa} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

d) Die elektrische Leistung ist gleich der mechanischen Leistung

$$P_{el} = P_{mech}$$

$$\Delta\Phi I_k = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

Mit

$$\vec{v} = R\Omega\vec{e}_\varphi$$

und

$$\vec{F} = F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

ist

$$\vec{F} \bullet \vec{v} = F_\varphi R\Omega$$

Es folgt

$$F_\varphi = \frac{P_{el}}{R\Omega}$$

$$= \frac{\Delta\Phi I_k}{R\Omega}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\Omega B_0(R_2^2 - R_1^2)\Omega B_0 H\kappa (R_2^2 - R_1^2) \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{R\Omega}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\Omega B_0^2 (R_2^2 - R_1^2)^2 H\kappa \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{R}$$

Das Drehmoment ist

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= R\vec{e}_R \times F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$= RF_\varphi\vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{2}\pi\Omega B_0^2 (R_2^2 - R_1^2)^2 H\kappa \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{e}_z$$