Felder und Wellen Übung 10

Induktion

Wir kennen das Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{J}\, d\vec{f}$

(wenn $\dot{\vec{D}} = 0$) (Stromdichte erzeugt magnetisches Wirbelfeld)

Maxwell: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ $\rightarrow$ zeitliche Änderung der mag. Flussdichte führt zu elektrischem Wirbelfeld

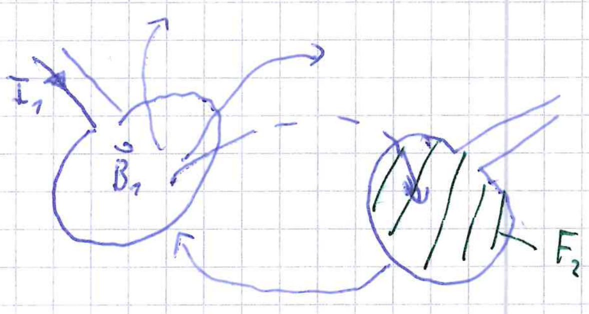
$$U_{ind} = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\iint \vec{B}\, d\vec{f}}_{\Phi_m} = -\frac{d}{dt} \Phi_m$$

induzierte Spannung

zeitl. Änderung des mag. Flusses

führt zu

Bsp: 2 Leiterschleifen



Die vom Strom I_1 in Schleife 1 verursachte Flussdichte $\vec{B}_1$ führt zu einem Fluss Φ_{m12} in Schleife 2

$$\Phi_{m12} = \iint_{F_2} \vec{B}_1\, d\vec{f} = L_{12} \cdot I_1 \quad (\sim I_1)$$

$$U_{ind} = -\dot{\Phi}_{m12} \qquad (N_2 = 1)$$

Änderung verursacht durch:

- Änderung des Stromes
- Änderung der Fläche (Drehen, Schieben, Biegen ...)

L_{12}: Gegeninduktivität zwischen den Schleifen 1/2 $\quad L_{12} = L_{21}$

$\Phi_{m1} = \iint\limits_{F_1} \vec{B}_1 \, d\vec{f} = L_{11} \cdot I_1$

L_{11}, L_{22} : Selbstinduktivitäten der Schleifen

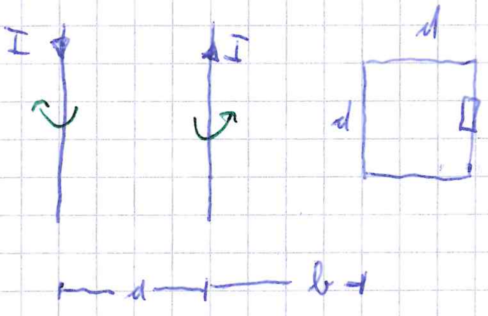
Zusammenhang zwischen Induktivitäten und der Feldtheorie:

$(W_m = \iiint w_m \, dV$, $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H})$

1 Leiter $W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2$, N-Leiter: $W_m = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{k=1}^{N} L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k$

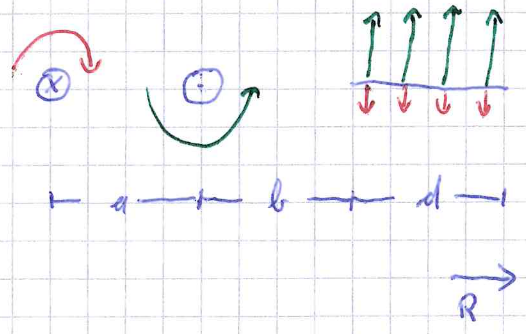
vgl. Kondensator $W_{el} = \frac{1}{2} C \cdot U^2$

Aufgabe 23



Ges.: Φ_m durch Leiterschleife

"von oben"



$\vec{H} \perp$ Leiterschleife

$\vec{B} \perp$ "

a) $\Phi_m = \iint \vec{B} \, d\vec{f} = \mu \iint \vec{H} \, d\vec{f} = \mu \iint (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \, d\vec{f}$

$\oint \vec{H}_1 \, ds = \iint \vec{J}_1 \, d\vec{f}$ $\qquad 2\pi R_1 H_1 = -I \Rightarrow H_1 = -\frac{I}{2\pi R_1}$

$\oint \vec{H}_2 \, ds = \iint \vec{J}_2 \, d\vec{f}$ $\qquad 2\pi R_2 H_2 = I \Rightarrow H_2 = \frac{I}{2\pi R_2}$

wähle $R_2 = R \rightarrow R_1 = R + a$

$$\Rightarrow H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi}\left(-\frac{1}{R+a} + \frac{1}{R}\right)$$

$$\Phi_m = \mu \int_{R=b}^{b+d} \int_{z=0}^{d} \frac{I}{2\pi}\left(-\frac{1}{R+a} + \frac{1}{R}\right) dz\, dR = d\, \frac{\mu I}{2\pi} \int_{R=b}^{b+d} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right) dR$$

$$= \mu d \frac{I}{2\pi}\left[\underbrace{\ln(R) - \ln(R+a)}_{\ln\left(\frac{R}{R+a}\right)}\right]_b^{b+d}$$

$$= \mu d \frac{I}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{b+d}{b+d+a}\right) - \ln\left(\frac{b}{b+a}\right)\right]$$

b) $I = I_0 \sin(\omega t)$ in den Drähten

Ges.: $I_{ind}(t)$ in der Schleife

Woher kommt der Strom?

$$\dot{I}_{Drähte} \rightarrow \dot{\vec{B}} \text{ im Raum} \rightarrow \dot{\Phi}_{m\ Schleife} \rightarrow U_{ind} \xrightarrow{U = R \cdot I} I_{ind} = \frac{U_{I\,ind}}{R_0}$$

$$\dot{\Phi}_m = \frac{d}{dt}\Phi_m = \mu d \frac{\dot{I}(t)}{2\pi}\left[\ln(\dots) - \ln(\dots)\right]$$

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt}\left(I_0 \sin(\omega t)\right) = I_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow I_{ind}(t) = -\frac{1}{R_0}\frac{\mu \cdot d}{2\pi} I_0\, \omega \cos(\omega t)\left[\ln\left(\frac{b+d}{b+d+a}\right) - \ln\left(\frac{b}{b+a}\right)\right]$$

c) Ges.: $I_{ind}(t)$ bei bewegter Leiterschleife

Leiterschleife bewegt sich $b = v \cdot t$

Es gilt wieder $I_{ind}(t) = -\frac{\dot{\Phi}_m(t)}{R_0}$

$$\dot{\Phi}_m = \frac{\mu d}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\left[I(t) \cdot \left[\ln(vt + d) - \ln(vt + d + a) - \ln(vt) + \ln(vt + a)\right]\right]$$

... wegen zeitlich veränderlichen Strom

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \frac{\mu d}{2\pi}\left[\dot{I}(t)\cdot\left[\ln(vt+d) - \ln(vt+d+a) - \ln(vt) + \ln(vt+a)\right] + \right.$$

$$\left. I(t)\cdot v\cdot\left[\frac{1}{vt+d} - \frac{1}{vt+d+a} - \frac{1}{vt} + \frac{1}{vt+a}\right]\right.$$

$\hookrightarrow$ Anteil $\sim v$, aufgrund der Bewegung

Aufgabe 24

Ges: Selbstinduktionskoeffizient pro Längeneinheit $\frac{L}{l}$

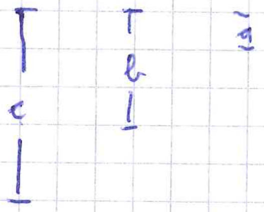
Zugang über Feldenergie: $W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad \Big) \cdot \frac{1}{l}$

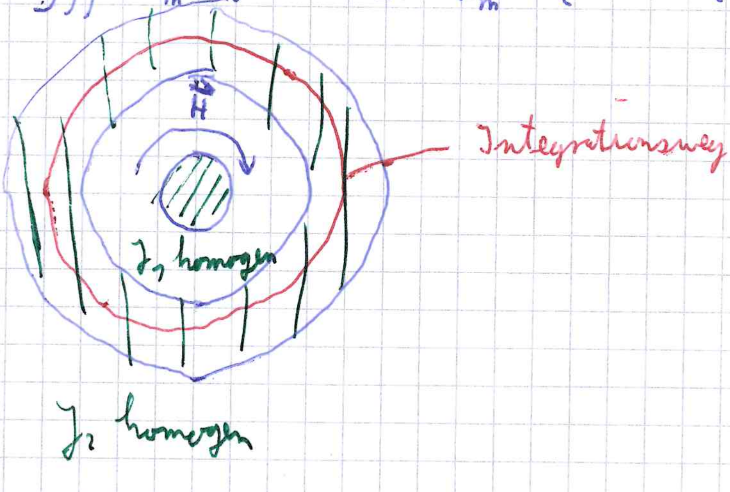
$$\Leftrightarrow \quad \frac{W_m}{l} = \frac{1}{2}\frac{L}{l} I^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{L}{l} = \frac{W_m}{l}\cdot\frac{2}{I^2}$$

$\rightarrow$ Berechne $\frac{W_m}{l} = \frac{1}{l}\iiint w_m \, dV$ mit $w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} = \frac{1}{2}\mu\vec{H}^2$

$\vec{H} = ?$





$$I_1 = \iint \vec{J}_1 \, d\vec{f} = J_1 \cdot \pi a^2 = I$$

$$I_2 = \iint \vec{J}_2 \, d\vec{f} = J_2\left(\pi c^2 - \pi l^2\right) = -I$$

$$\vec{J}_1 = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{J}_2 = -\frac{I}{\pi(c^2 - l^2)}\vec{e}_z$$

$$\underbrace{\oint_{K(R)} \vec{H}\, d\vec{s}}_{2\pi R \cdot H(R)} = \iint \vec{J}\, d\vec{A}$$

- Für $R \leq a$: $\quad 2\pi R\, H(R) = \pi R^2 J_1 = \frac{R^2}{a^2} I$

$$\Rightarrow H(R) = \frac{R \cdot I}{2\pi a^2} \qquad (1)$$

- Für $a < R \leq b$: $\quad 2\pi R\, H(R) = I$

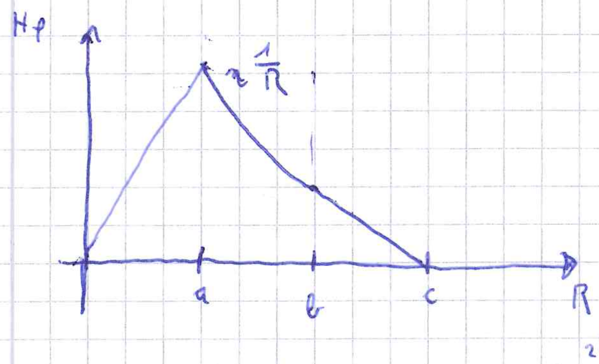
$$\Rightarrow H(R) = \frac{I}{2\pi R} \qquad (2)$$

- Für $b < R \leq c$: $\quad 2\pi R\, H(R) = I + J_2 \cdot (\pi R^2 - \pi b^2)$

$$= I - \frac{I}{\pi c^2 - \pi b^2} \cdot (\pi R^2 - \pi b^2)$$

$$\Rightarrow H(R) = I\left(1 - \frac{R^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi R} \qquad (3)$$

- Für $R > c$: $H = 0$



$$\frac{W_m}{l} = \frac{1}{l} \iiint w_m\, dV = \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} \int_0^{l} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \mu H^2(R)\, R\, dR\, dz\, d\varphi$$

$$= \cancel{\varphi} \cdot \frac{1}{l} \cdot 2\pi l\, \frac{1}{2} \mu \int_0^{\infty} H^2(R)\, dR$$

$$= \mu \pi \left[\int_0^a H^2(R)\, R\, dR + \int_a^b H^2(R) R\, dR + \int_b^c H^2(R)\, R\, dR + \underbrace{\int_c^{\infty} H^2(R)\, R\, dR}_{=0} \right]$$

$$\frac{W_m}{l} = \mu \pi \left[\frac{I^2}{16\pi^2} + \frac{I^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{I^2}{4\pi^2} C_1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{W_m}{l} \cdot \frac{2}{I^2} = \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) + C_1 \right)$$

Aufgabe 25

a) Ges: L_{aa}, L_{bb} (Selbstinduktionskoeff.)

L_{ab}, L_{ba} (Gegeninduktionskoeff.)

$$n\, \Phi_{aa} = L_{aa} \cdot I \qquad \Phi_{aa} = \iint_{F_a} \vec{B}_a \, d\vec{f} = \pi R_a^2 \cdot B_a$$

$\vec{B}_a = ?$

Lange Spule: $H \cdot l = n I \Rightarrow B_a = \mu_0 \frac{n \cdot I_a}{l}$

$\vec{B}_b = ?$

$$B_b = \mu_0 \cdot \frac{m \cdot I_b}{l}$$

$$\Leftarrow \Rightarrow L_{aa} = \frac{n \cdot \Phi_{aa}}{I_a} = n \pi R_a^2 \mu_0 \frac{n \cdot I_a}{l} \cdot \frac{1}{I_a} = \pi R_a^2 \mu_0 \frac{n^2}{l}$$

L_{bb} analog: $L_{bb} = \frac{m \cdot \Phi_{bb}}{I_b} = \pi R_b^2 \cdot \mu_0 \frac{m^2}{l}$

$$\Phi_{ab} = B_a \cdot F_b = \underbrace{\mu_0 \frac{n \cdot I_a}{l} \cdot \pi R_b^2}$$

Anteil des Feldes von Spule A, der sich in Spule B befindet

$$m \cdot \Phi_{ab} = L_{ab} \cdot I_a \Rightarrow L_{ab} = \mu_0 \frac{n \cdot m}{l} \cdot \pi R_b^2$$

oder: $\Phi_{ba} = B_b \cdot F_b = \underbrace{\mu_0 \frac{m I_b}{l} \cdot \pi R_b^2}$

von Spule B erzeugtes Feld befindet sich nur in Fläche F_b

$$n \cdot \Phi_{ba} = L_{ba} \cdot I_b \Rightarrow L_{ba} = \mu_0 \frac{n \cdot m}{l} \pi R_b^2$$