

Felder und Wellen

WS 2015/2016

Musterlösung zur 10. Übung

23. Aufgabe

a) Berechnung des Magnetfeldes mit dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{j} d\vec{f} = I$$

$$\vec{H} = H_{\varphi}(R) \vec{e}_{\varphi}$$

wg. Zylindersymmetrie

$$2\pi R H_{\varphi}(R) = I$$

$$H_{\varphi}(R) = \frac{I}{2\pi R}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_{\varphi}$$

Koordinatenursprung der Zylinderkoordinaten wird im Draht 2 gewählt.
Für $\varphi = 0$ gilt:

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_{\varphi}$$

$$\vec{H}_1 = \frac{-I}{2\pi(R+a)} \vec{e}_{\varphi}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a} \right) \vec{e}_{\varphi}$$

Fluss durch Leiterschleife

$$\begin{aligned} \phi &= d \cdot \int_b^{b+d} \frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a} \right) dR \\ &= d \cdot \frac{\mu I}{2\pi} [\ln R - \ln(R+a)]_b^{b+d} \\ &= d \cdot \frac{\mu I}{2\pi} \underbrace{(\ln(b+d) - \ln(b+d+a) - \ln b + \ln(b+a))}_{C_1} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu I_0 d \sin \omega t}{2\pi} C_1 \\ &= \frac{\mu I_0 d \omega}{2\pi} \cos \omega t C_1 \\ U &= -\frac{\partial \phi}{\partial t} \\ I &= \frac{U}{R_0} = -\frac{\mu I_0 d \omega}{2\pi R_0} \cos \omega t C_1\end{aligned}$$

c) Die Leiterschleife befindet sich in gleichförmiger Bewegung $b = vt$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu I_0 d \sin \omega t}{2\pi} C_1 \\ &= \frac{\mu I_0 d}{2\pi} \left(C_1 \frac{\partial}{\partial t} \sin \omega t + \sin \omega t \frac{\partial}{\partial t} C_1 \right) \\ &= \frac{\mu I_0 d}{2\pi} \left(C_1 \omega \cos \omega t + v \sin \omega t \left(\frac{1}{b+d} - \frac{1}{b+d+a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b+a} \right) \right)\end{aligned}$$

24. Aufgabe

Zur Lösung der Aufgabe muss zunächst das Magnetfeld berechnet werden, um dann über die Feldenergie die Selbssinduktion zu berechnen ($W_m = \frac{1}{2} LI^2$)

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{J} d\vec{f}$$

Aus der Symmetrie ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H_\varphi(R) \vec{e}_\varphi \implies \oint \vec{H} d\vec{s} = 2\pi R H_\varphi(R) \\ \vec{J} &= J_z \vec{e}_z\end{aligned}$$

$R < a$: Der Strom verteilt sich gleichmäßig über die Leiterfläche:

$$\begin{aligned}J_z &= \frac{I}{\pi a^2} \\ \int \vec{J} d\vec{f} &= \int_0^R \frac{I}{\pi a^2} 2\pi R' dR' \\ &= \frac{I}{a^2} [R'^2]_0^R \\ &= \frac{IR^2}{a^2} \\ \implies H_\varphi(R) &= \frac{IR}{2\pi a^2}\end{aligned}$$

Energiedichte und Feldenergie

$$\begin{aligned}
 w_m &= \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} = \frac{1}{2} \mu \left| \vec{H} \right|^2 \\
 &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{IR}{2\pi a^2} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$W_m = \int w_m \, dv$$

Da die Feldenergie unendlich groß würde, wird hier auf die Leiterlänge bezogen gerechnet:

$$\begin{aligned}
 \frac{W_{m1}}{l} &= \frac{1}{l} \int w_m \, dv \\
 &= \int_0^a w_m \, 2\pi R' \, dR' \\
 &= \frac{\mu I^2}{4\pi a^4} \int_0^a R'^3 dR' \\
 &= \frac{\mu I^2}{16\pi a^4} [R'^4]_0^a \\
 &= \frac{\mu I^2}{16\pi} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{8\pi} I^2 \\
 \implies \frac{L_1}{l} &= \frac{\mu}{8\pi}
 \end{aligned}$$

$a \leq R < b$:

$$\begin{aligned}
 J_z &= 0 \\
 \int \vec{J} \, d\vec{f} &= I \\
 \implies H\varphi(R) &= \frac{I}{2\pi R}
 \end{aligned}$$

$$w_m = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{W_{m2}}{l} &= \frac{1}{l} \int w_m \, dv \\
 &= \int_a^b w_m \, 2\pi R' \, dR' \\
 &= \frac{\mu I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{1}{R'} dR' \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} I^2
 \end{aligned}$$

$$\implies \frac{L_2}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$b \leq R < c :$

$$J_z = -I \left(\frac{1}{\pi c^2 - \pi b^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \int \vec{J} d\vec{f} &= I - \int_b^R \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} 2\pi R' dR' \\ &= I - \frac{I}{c^2 - b^2} [R'^2]_b^R \\ &= I \left(1 - \frac{R^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) = I \frac{c^2 - R^2}{c^2 - b^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H\varphi(R) = \frac{I}{2\pi R} \frac{c^2 - R^2}{c^2 - b^2}$$

$$w_m = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^2} \left(\frac{c^2 - R^2}{c^2 - b^2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{W_{m3}}{l} &= \frac{1}{l} \int w_m dv \\ &= \int_b^c w_m 2\pi R' dR' \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi} \int_b^c \frac{1}{R'} \left(\frac{c^2 - R'^2}{c^2 - b^2} \right)^2 dR' \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2 - b^2} \right)^2 \int_b^c \frac{1}{R'} (c^4 - 2c^2 R'^2 + R'^4) dR' \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2 - b^2} \right)^2 \left[c^4 \ln R' - c^2 R' + \frac{1}{4} R'^4 \right]_b^c \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2 - b^2} \right)^2 \left[c^4 \ln \frac{c}{b} - c^2 c^2 + c^2 b^2 + \frac{1}{4} c^4 - \frac{1}{4} b^4 \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2 - b^2} \right)^2 \left[c^4 \ln \frac{c}{b} + c^2 b^2 - \frac{3}{4} c^4 - \frac{1}{4} b^4 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{L_3}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{1}{c^2 - b^2} \right)^2 \left[c^4 \ln \frac{c}{b} + c^2 b^2 - \frac{3}{4} c^4 - \frac{1}{4} b^4 \right]$$

$c \leq R$: Innerer und äußerer Strom heben sich auf. Daher ist außen kein Feld vorhanden.

$$\Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{L_1}{l} + \frac{L_2}{l} + \frac{L_3}{l}$$

25. Aufgabe

a) Mit dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H} d\vec{s} = I$ ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned}H_a l &= n I_a \\H_b l &= m I_b\end{aligned}$$

Der selbstinduzierte magnetische Fluss in der Primärspule ist:

$$\Phi_{aa} = \mu_0 H_a A_a = \mu_0 H_a \pi R_a^2$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\Phi_{aa} &= \mu_0 H_a \pi R_a^2 = \mu_0 \frac{n}{l} I_a \pi R_a^2 \\ \Rightarrow L_{aa} &= n \Phi_{aa} / I_a = \mu_0 \frac{n^2}{l} \pi R_a^2\end{aligned}$$

Ebenso lassen sich die anderen Induktionskoeffizienten Berechnen.

$$\begin{aligned}\Phi_{bb} &= \mu_0 H_b A_b = \mu_0 H_b \pi R_b^2 \\ \Phi_{ab} &= \mu_0 H_a A_b = \mu_0 H_a \pi R_b^2 \\ \Phi_{ba} &= \mu_0 H_b A_b = \mu_0 H_b \pi R_b^2\end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass sowohl bei Φ_{ab} als auch bei Φ_{ba} der kleinere Radius angesetzt werden muss.

Und weiter:

$$\begin{aligned}L_{bb} &= \mu_0 \frac{m^2}{l} \pi R_b^2 \\ L_{ab} &= \mu_0 \frac{nm}{l} \pi R_b^2 \\ L_{ba} &= \mu_0 \frac{nm}{l} \pi R_b^2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}U_a &= -L_{aa} \frac{dI_a}{dt} - L_{ab} \frac{dI_b}{dt} \\ U_b &= -L_{bb} \frac{dI_b}{dt} - L_{ab} \frac{dI_a}{dt}\end{aligned}$$

$I_b = 0$ bei unbelasteter Spule.

$$\begin{aligned}U_a &= -L_{aa} \frac{dI_a}{dt} \\ U_b &= -L_{ab} \frac{dI_a}{dt}\end{aligned}$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{U_a}{L_{aa}} &= \frac{U_b}{L_{ab}} \\ U_a &= \frac{L_{aa}}{L_{ab}} U_b \\ U_a &= \frac{nR_a^2}{mR_b^2} U_b\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}U_a &= -L_{aa}\dot{I}_a - L_{ab}\dot{I}_b \\ U_b &= -L_{bb}\dot{I}_b - L_{ab}\dot{I}_a\end{aligned}$$

Löst man die letzte Zeile nach $\dot{I}_a$ auf:

$$\dot{I}_a = -\frac{L_{bb}\dot{I}_b + U_b}{L_{ab}}$$

$$\begin{aligned}U_a &= \frac{U_b + L_{bb}\dot{I}_b}{L_{ab}} L_{aa} - L_{ab}\dot{I}_b \\ U_a &= \frac{L_{aa}}{L_{ab}} U_b + \frac{L_{bb}L_{aa} - L_{ab}^2}{L_{ab}} \dot{I}_b \\ U_a &= \frac{nR_a^2}{mR_b^2} U_b + \frac{m^2 R_b^2 n^2 R_a^2 - n^2 m^2 R_b^4}{nmR_b^2} \dot{I}_b\end{aligned}$$

für $R_a = R_b$ verschwindet der letzte Term:

$$U_a = \frac{n}{m} U_b$$

oder

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{n}{m}$$

Bei einem idealen Transformator ohne Streuverluste verhalten sich die Spannungen wie das Verhältnis der Windungszahl.