Felder und Wellen Übung 11:

Maxwellgleichungen:

bisher vernachlässigt

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d}{dt}\vec{D}$$

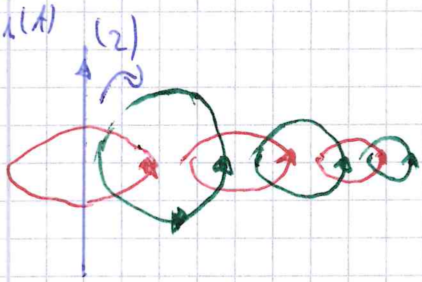
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B} \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Was passiert, wenn $\frac{d}{dt}\vec{D} \neq 0$?

Es sei $\vec{j} = 0$

(1) $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{d}{dt}\vec{D} = \varepsilon \frac{d}{dt}\vec{E}$ "Zeitl. Änderung des E-Feldes bewirkt ein mag. Wirbelfeld."

(2) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B} = -\mu \frac{d}{dt}\vec{H}$ "Zeitl. Änderung des H-Feldes bewirkt ein el. Wirbelfeld."



Durch Kopplung vom $\vec{E}$ und $\vec{B}$ können sich elektromagnetische Wellen ausbreiten, auch ohne ρ und $\vec{j}$

$\vec{B}$, $\vec{E}$ zeitlich variabel

Wellengleichung im Nichtleiter ($\vec{j} = 0$)

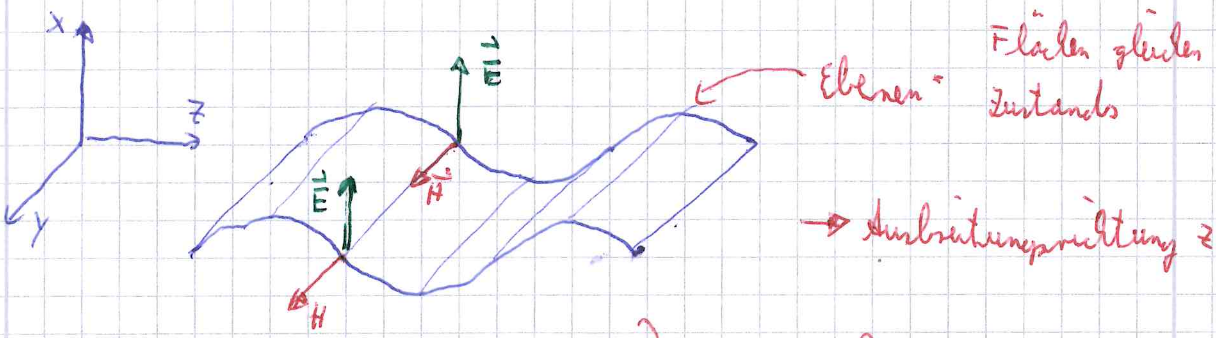
aus (1) und (2) folgt:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Mit $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$

Einfachste Lösung der Wellengleichung: Ebene Wellen

- Hängt nur von einer Ortskoordinate (statt drei) ab
- Ausbreitungsrichtung ist diese Ortskoordinate



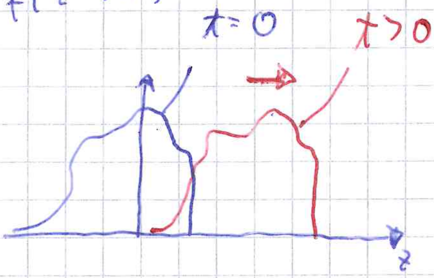
$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

in z-Richtung gilt: $\vec{E} = \vec{E}(z,t)$

$\vec{H} = \vec{H}(z,t)$

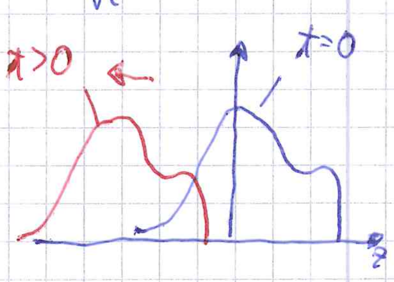
- Lösungen haben alle die Form $E(z,t) = f(z-vt) + g(z+vt)$
- $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stehen senkrecht aufeinander
- $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_a$
- $\vec{e}_a \sim \vec{E} \times \vec{H}$ (wenn zwei dieser Größen bekannt sind, ist auch die dritte Richtung bekannt!)

$f(z-vt)$



Welle bewegt sich in +z-Richtung

$g(z+vt)$



Welle bewegt sich in −z-Richtung

Harmonische Wellen:

Entstehen durch sin/cos-förmige Anregung, technisch bedeutsam

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \, e^{j(\omega t - kz)}$$

k: Wellenzahl

$k = \frac{\omega}{c}$

Physikalisches Feld ist der Realteil:

$$\mathrm{Re}\{\vec{E}_0 \, e^{j(\omega t - kz)}\} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz), \text{ wenn } \vec{E}_0 \text{ reell}$$

Aufgabe 26

a) Ges.: Herleitung der Wellengleichung für ebene Wellen im Vakuum.

Vakuum: $\vec{J} = 0$, $\rho = 0$, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$

Hinweis: (1) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \vec{H}$

(2) $\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}$

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

$$\operatorname{rot} \vec{E} \underset{FS}{=} \vec{e}_x \left(\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \right) + \vec{e}_z \left(\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \right)$$

$$(1) \quad \underbrace{-\vec{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z}}_{\operatorname{rot} \vec{E}} = \underbrace{-\vec{e}_x \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} - \vec{e}_y \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \cancel{\vec{e}_z \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}}^{=0}}_{= -\mu_0 \frac{d}{dt} \vec{H}}$$

für (2) analog:

$$-\vec{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \vec{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} = \vec{e}_x \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \vec{e}_y \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \cancel{\vec{e}_z \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}}^{=0}$$

aus (1) folgt: a) $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$

b) $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$

aus (2) folgt: c) $\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$

d) $\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$

4 verkoppelte DGLn

Gl. a) „$\frac{\partial}{\partial z}$": $\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} H_x$

Gl. d) „$\frac{\partial}{\partial t}$": $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} H_x = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=\frac{1}{c^2}} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

analog Gl. b) „$\frac{\partial}{\partial z}$", Gl. c) „$\frac{\partial}{\partial t}$" $\Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=\frac{1}{c^2}} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$

analog für $\vec{H}$ Gl. a) „$\frac{\partial}{\partial t}$" d) „$\frac{\partial}{\partial z}$" $\Rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}$

H_y analog $\Rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$

b) zu zeigen: $f(z \pm ct)$ erfüllt die Wellengleichung

$f(z \pm ct)$: $\frac{d^2 f(z \pm ct)}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f(z \pm ct)}{dt^2}$

NR: $\frac{df}{dz} = f'(z \pm ct)$; $\frac{df}{dt} = f'(z \pm ct) \cdot (\pm c)$

$$\frac{d f'(z \pm ct)}{dz} = f''(z \pm ct)$$

$$\frac{d}{dt}\left(f'(z\pm ct)\cdot(\pm c)\right) = f''(z\pm ct)\cdot(\pm c)\,(\pm c)$$

$$= f''(z\pm ct)\cdot c^2$$

$$\Rightarrow f''(z\pm ct) = \frac{1}{\cancel{c^2}}\, f''(z\pm ct)\cdot \cancel{c^2} \quad \checkmark$$

Jede Funktion der Form $f(z\pm ct)$ erfüllt die Wellengleichung!

c) Ges.: Können sich longitudinale Wellen ausbreiten?

Longitudinale Wellen: $\vec{E}/\vec{H}$ hat Komponente in Ausbreitungsrichtung

Vakuum $\rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho = 0$; $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ es gilt: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

(ebene Welle $\rightarrow z$)

$$\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \; ; \quad \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial y}} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow E_z = B_z = \text{konst.} = 0$$

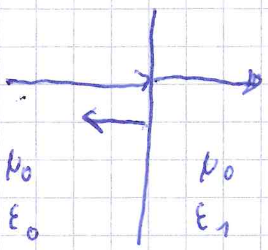
Aufgabe 27

a) Ebene Welle Ausbreitungsrichtung $z \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} = 0$

Linear polarisiert: E-Feld dreht sich nicht, sondern schwingt

nur E_y $(E_x = E_z = 0)$

Grenzfläche:



geg: $\vec{E} \Rightarrow E_y$

ges: $\vec{H} \Rightarrow H_x$

$$\vec{E}_0 = E_0 \, e^{j(\omega t - k_0 z)} \, \vec{e_y}$$

siehe A 26

aus $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$ folgt: $-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$ (1)

Ansatz: $\vec{H}_0 = H_0 \, e^{j(\omega t - k_0 z)} \, \vec{e}_x$

$\vec{E}_0, \vec{H}_0$ in (1):

$$-E_0 \, \cancel{e^{j(\omega t - k_0 z)}} (-\cancel{j} k_0) = -\mu_0 H_0 \, \cancel{e^{j(\omega t - k_0 z)}} (\cancel{j}\omega)$$

$k = \frac{\omega}{c}; \; \frac{1}{c} = \sqrt{\mu \varepsilon}$

$$\Rightarrow H_0 = -E_0 \frac{k_0}{\omega \mu_0} = -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}} E_0$$

$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ ist Wellenwiderstand

$$\vec{H}_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \, E_0 \, e^{j(\omega t - k_0 z)} \, \vec{e}_x$$

$\rightarrow$ · H und E haben ihr Max. am gleichen Ort

· $\vec{H} \perp \vec{E}$

Für rücklaufende Welle analog:

$$\vec{E}_r = E_r \, e^{j(\omega t + k_0 z)} \, \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_r = \underbrace{+ E_r \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{H_r} \, e^{j(\omega t + k_0 z)} \, \vec{e}_x$$

b) Ges.: E_r, E_1, H_0, H_r, H_1 in Abhängigkeit von E_0

Stetigkeitsbedingung für Felder

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad H_{t1} = H_{t2}$$

$$(1) \quad E_0 + E_r = E_1 \qquad (2) \quad H_0 + H_r = H_1$$

Mit $H_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0 \;,\; H_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_r \;,\; H_1 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\, E_1$

$$\Rightarrow (2') \quad -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0 + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\, E_1 \qquad \Big|\cdot\sqrt{\mu_0}$$

$\Rightarrow$ 2 Gl. (1), (2') für 2 Unbekannte E_r, E_1

$\Rightarrow$ Lösung: $E_r = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1}}\, E_0$

$$E_1 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1}}\, E_0$$

Für H-Felder