Felder und Wellen

WS 2015/2016

Musterlösung zur 11. Übung

26. Aufgabe

a) Die Welle breitet sich im Vakuum aus, deshalb gilt $\rho = 0, \vec{j} = 0$. Die zeitabhängigen Maxwellgleichungen im Vakuum ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$) lauten

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Eine sich in z-Richtung ausbreitende ebene Welle ist per Definition in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnt. Daher $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$.

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e}_y$$
$$rot\vec{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z}\vec{e}_y$$

Die Maxwellgleichungen komponentenweise geschrieben lauten also

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{1}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{2}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{3}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{4}$$

Man hat nur vier gekoppelte Differenzialgleichungen. Um zur Wellengleichung zu kommen, muss man die Gleichungen so umformen, dass sie entkoppelt werden. Zuerst werden alle Gleichungen nach z abgeleitet. Man erhält:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial t} \tag{5}$$
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} \tag{6}$$
$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} \tag{7}$$
$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial t} \tag{8}$$

Setzt man (4) in (5), (3) in (6), (2) in (7) und (1) in (8) ein und verwendet man $\frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$ erhält man die entkoppelten Wellengleichungen:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{9}$$
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{10}$$
$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{11}$$
$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \tag{12}$$

b) Lösung der Wellengleichungen z.B. für E_x sind sämtliche Funktionen der Form

$$E_x = f(z - ct) + g(z + ct)$$

Berechnet man die Ableitungen erhält man:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = f'(z - ct) + g'(z + ct)$$
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = f''(z - ct) + g''(z + ct)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = (-c)f'(z - ct) - cg'(z + ct)$$
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 f''(z - ct) + c^2 g''(z + ct)$$

Man sieht, dass die Ableitungen Gleichung (10) erfüllen.

c) Geht man von

$$div\vec{D} = \rho = 0$$
$$div\vec{B} = 0$$

aus und berücksichtigt, dass alle Ableitung in x- und y-Richtung 0 sind. Erhält man:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = \text{const.} = 0$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow H_z = \text{const.} = 0$$

Eine ebene Welle hat also keine longitudinale Komponente.

27. Aufgabe

a) Zunächst soll gezeigt werden, wie aus einem gegebenen E-Feld das H-Feld berechnet werden kann. Hierfür wird

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

benötigt.

Das E-Feld der Welle hat nur eine y-Komponente : $E_z, E_x, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} = 0$, das Material ist nicht magnetisch $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$-\frac{E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

Diese Gleichung muß für alle t, z erfüllt sein

$$\Rightarrow H_x = H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

mit konstantem H_0. Das H-Feld ist also in Phase mit dem E-Feld.

Durch Einsetzen erhält man:

$$jk_1 E_0 = -j\omega\mu_0 H_0$$
$$\Rightarrow H_0 = -\frac{k}{\omega\mu_0} E_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E_0$$

mit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ und $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$.

Den Faktor $\mathit{\Gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ nennt man auch Wellenwiderstand. Er stellt allgemein die Amplituden des E- und des H-Feldes in Beziehung zueinander. Der Wellenwiderstand hat die Einheit Ohm, darf aber nicht mit dem Ohmschen Widerstand verwechselt werden. (Man beachte die Analogie: $|E| = \mathit{\Gamma}|H|$ und $U = RI$).

Mit dem Wellenwiderstand kann die Amplitude des B-Feld direkt aus dem E-Feld berechnet werden. Um das richtige Vorzeichen zu erhalten, muß man beachten,daß das E-Feld, das H-Feld und der Pointigvektor S ein Rechtssystem bilden müssen ($\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$; Siehe auch Abbildung 1). Dabei zeigt der Pointingvektor immer in Ausbreitungsrichtung. Anhand der Vektoren kann das Vorzeichen abgelesen werden. Für die hinlaufende Welle sind die Vorzeichen entgegengesetzt. Bei der rücklaufenden Welle sind die Vorzeichen gleich.

Zurücklaufende Welle:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= E_r e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_y \\ \vec{H}_r &= \frac{E_r}{\mathit{\Gamma}_0} e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_x \\ &= E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_x \end{aligned}$$

b,c) Zunächst nochmal eine Definition der hinlaufenden Welle (0) der rücklaufenden Welle (r) und der transmitierten Welle (1):

Hinlaufenden Welle:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y \\ \vec{H}_0 &= H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Reflektierte Welle:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= E_r e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_y \\ \vec{H}_r &= H_r e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_x \end{aligned}$$

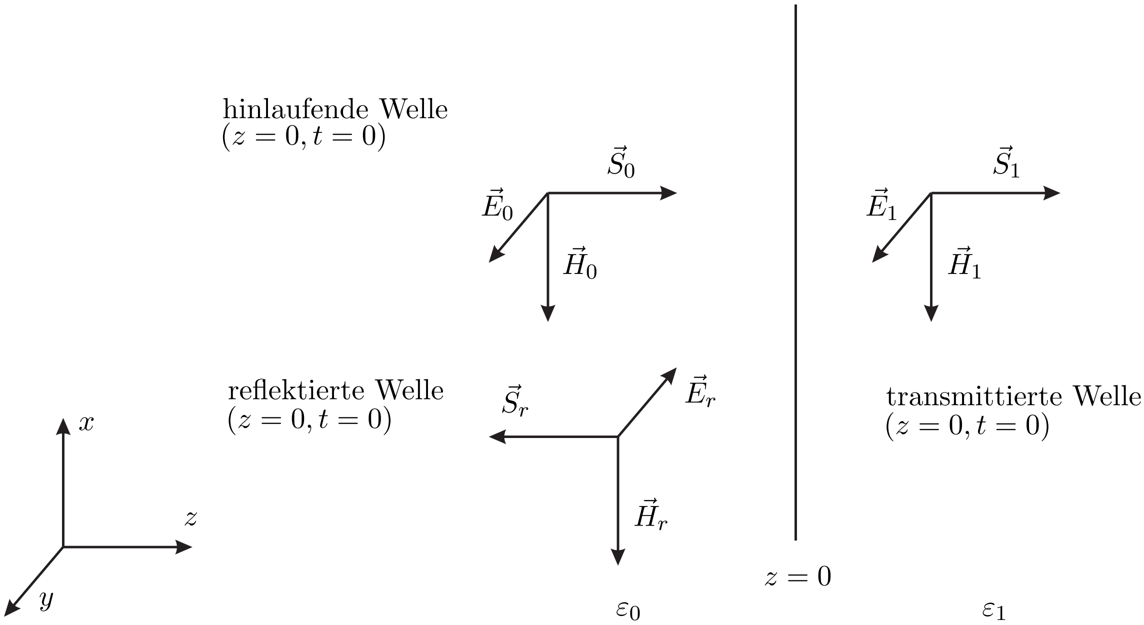

Abbildung 1: Einlaufende, reflektierte und transmittierte Welle. Die Skizze dient nur dazu den Orientierungssinn (über $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$) der Vektoren jeweils einer Welle zu bestimmen. (Z.B. $H_0 = -\frac{1}{\Gamma_0} E_0$). Jedoch kann noch keine Aussage gemacht werden ob E_0 und E_r in die selbe oder entgegengesetzte Richtung zeigen. Dies ergibt sich erst aus der Rechnung.

Durchgelassene Welle:

$$\vec{E}_1 = E_1 e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_y$$
$$\vec{H}_1 = H_1 e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_x$$

Die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ sind bei $z = 0$ und $t = 0$ stetig.

Zunächst wird nur die Einfallende und die durchgelassene Welle betrachtet. Für die Wellen müssen die Stetigkeitsbedingungen und die Beziehungen zwischen E und H gelten.

Stetigkeit:

$$E_0 = E_1$$
$$H_0 = H_1$$

Wellenwiderstand:

$$E_0 = -\Gamma_0 H_0$$
$$E_1 = -\Gamma_1 H_1$$

Sind die Wellenwiderstände in den Medien unterschiedlich sind die Bedingungen nicht zu erfüllen!!!

Daher muss auch eine rücklaufende Welle in Medium 1 existieren. Die Bedingungen lauten dann:

Stetigkeit:

$$
\begin{aligned}
E_0 + E_r &= E_1 \\
H_0 + H_r &= H_1
\end{aligned}
$$

Wellenwiderstand:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= -\Gamma_0 H_0 \\
E_r &= \Gamma_0 H_r \\
E_1 &= -\Gamma_1 H_1
\end{aligned}
$$

Setzt man die unteren Gleichungen in die Stetigkeitsbedingung des H-Feld ein, erhält man:

$$
\begin{aligned}
-\frac{E_0}{\Gamma_0} + \frac{E_r}{\Gamma_0} &= -\frac{E_1}{\Gamma_1} \\
\Longleftrightarrow -E_0\sqrt{\varepsilon_0} + E_r\sqrt{\varepsilon_0} &= -E_1\sqrt{\varepsilon_1}
\end{aligned}
$$

E_0 sei gegeben. Jetzt müssen die Gleichungen nach E_1 und E_r aufgelöst werden. Ersetzt man auf der rechten Seite E_1 durch die Stetigkeitsbedingung, erhält man:

$$
-\sqrt{\varepsilon_0}E_0 + \sqrt{\varepsilon_0}E_r = -\sqrt{\varepsilon_1}(E_0 + E_r)
$$

Und schließlich:

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1}} E_0 \\
E_1 &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1}} E_0
\end{aligned}
$$

Wählt man $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$ erhält man ein anschauliches Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= E_0 & H_0 &= -\frac{1}{\Gamma_0}E_0 & <S_0> &= \frac{1}{2}|E_0H_0| = \frac{E_0^2}{2\Gamma_0} \\
E_r &= -\frac{1}{3}E_0 & H_r &= -\frac{1}{3}\frac{1}{\Gamma_0}E_0 & <S_r> &= \frac{1}{9}\frac{E_0^2}{2\Gamma_0} \\
E_1 &= \frac{2}{3}E_0 & H_1 &= -\frac{2}{3}\frac{1}{\Gamma_1}E_0 & <S_1> &= \frac{8}{9}\frac{E_0^2}{2\Gamma_0} \\
& & &= -\frac{4}{3}\frac{1}{\Gamma_0}E_0 & &
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass der E-Feld Vektor der reflektierten Welle die Polarität wechselt und dass im Medium 2 der H-Feld Vektor sogar größer ist, als im Medium eins. Dies ist kein Widerspruch, da die Energiebilanz stimmt. $\frac{1}{9}$ der eingestrahlten Energie wird reflektiert und $\frac{8}{9}$ werden durchgelassen.