

Felder und Wellen

WS 2015/2016

12. Übung

28. Aufgabe

Gegeben ist folgendes \vec{H} -Feld einer harmonischen Welle im leeren Raum ($\vec{j} = 0$) in Kugelkoordinaten

$$\vec{H} = A e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

- Berechnen Sie das dazugehörige elektrische Feld aus der \vec{E} und \vec{H} verknüpfenden Maxwell-Gleichung $\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (für $r \neq 0$)
Wählen Sie dazu für \vec{E} eine harmonische Zeitabhängigkeit, so dass sich die zeitliche Ableitung vereinfacht.
- Nähern Sie die Felder für große r und berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$. Integrieren Sie den Poynting-Vektor über eine Kugeloberfläche. Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der Leistung, die durch die Kugeloberfläche transportiert wird.

29. Aufgabe

Eine elektromagnetische Welle mit dem \vec{E} -Feld $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y$ breitet sich im Vakuum aus. An der Stelle $z = 0$ trifft sie senkrecht auf eine Grenzfläche zu einem Medium mit $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ und der guten (nicht unendlich großen) Leitfähigkeit κ ($\kappa \gg \omega \varepsilon$).

- Machen Sie einen allgemeinen Ansatz wie in Aufgabe 27) für die hinlaufende, reflektierte und durchgelassene Welle. Berechnen Sie das Magnetfeld der durchgelassenen Welle H_t in Abhängigkeit von E_t mit $\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Beachten Sie, dass Sie im Leiter eine komplexe Wellenzahl (s. Skript Kapitel 9.3.2) ansetzen müssen. Wie lautet der komplexe Wellenwiderstand Γ_1 im Leiter in Abhängigkeit von ε_0 , μ_0 und κ .
- Der Wellenwiderstand im Leiter lässt sich auch mit $\Gamma = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}$ berechnen, wenn man eine komplexe Dielektrizität ansetzt. Berechnen Sie so den Wellenwiderstand mit Hilfe der Gleichungen im Skript Kapitel 9.4.2.1 (letzte Zeile).
- Berechnen Sie \vec{E} - und \vec{H} -Felder der an der Grenzfläche reflektierten und durchgelassenen Welle. (Vgl. Aufgabe 27).
- Sind das \vec{E} - und \vec{H} -Feld der durchgelassenen Welle in Phase?
- Was passiert mit der durch die Welle transportierten Energie im leitfähigen Medium?
- Zeigen Sie, dass für die komplexen Poyntingvektoren $\text{Re} \{S_0\} = \text{Re} \{S_r + S_t\}$ gilt, also die Energieerhaltung erfüllt ist. Was passiert bei $\kappa \rightarrow \infty$?