Felder und Wellen Übung 12

Wellen in leitfähigen Medien

letzte Übung: Wellen in Medien mit $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

dann: $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \Rightarrow \Delta\vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}$

Ansatz für harmonische ebene Wellen:

$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$ löst die Wellengleichung

mit $k = \frac{\omega}{c}$, $c^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$ (k reell)

Jetzt: $\kappa > 0$ (Leitfähigkeit vorhanden)

$\Rightarrow$ $\vec{E}$-Feld der Welle erzeugt Stromdichte $\vec{j}$

zusätzlicher Term

dann $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{d}{dt}\vec{D} \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} = \kappa\mu\frac{d\vec{E}}{dt} + \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial^2 t}}$

„Telegraphengleichung"

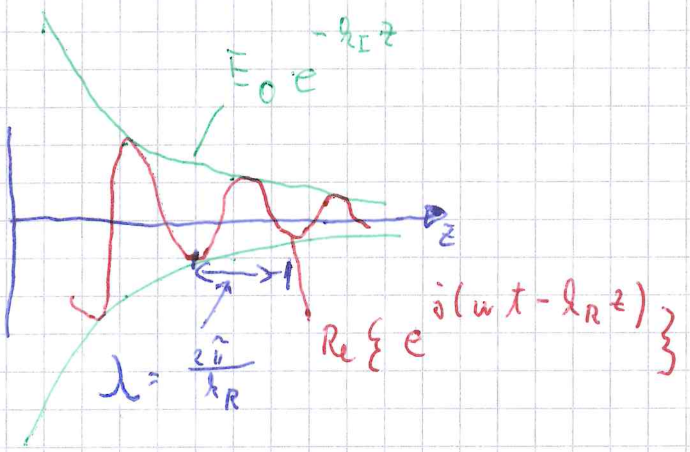
Gleicher Ansatz für harmonische ebene Wellen:

$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$ löst auch die Telegraphengl.

aber mit $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu\left(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon\mu}\right)}$ (komplex)

$= k_R - j\,k_I$ (dann $k_I > 0$)

$$\vec{E} = E_0\, e^{j(\omega t - (k_R - j k_I) z)} \vec{e}_y = E_0 \underbrace{e^{j(\omega t - k_R z)}}_{\text{schwingender Anteil}} \underbrace{e^{-k_I z}}_{\text{dämpfender Anteil}} \vec{e}_y$$



Aufgabe 28

$$\vec{H} = \underbrace{A\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \sin\vartheta}_{H_\varphi}\, \vec{e}_\varphi$$

ist eine harmonische Welle $(\vec{H} = e^{j\omega t} \cdot \vec{H}(\vec{r}))$

a) ges: $\vec{E}$ aus $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Ansatz: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})\, e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \cdot j\omega$

$$= j\omega \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon j \omega \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{e}_r \frac{1}{r \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(H_\varphi \sin\vartheta) - \cancel{\frac{\partial H_\vartheta}{\partial\varphi}}\right]$$

$$+ \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\cancel{\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial H_r}{\partial\varphi}} - \frac{\partial}{\partial r}(r H_\varphi)\right]$$

$$+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(r H_\vartheta)} - \cancel{\frac{\partial H_r}{\partial\vartheta}}\right]$$

$\vec{H}$ hat nur φ-Komponente

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(H_\varphi \sin\vartheta\right) = A\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) 2 \sin(\vartheta) \cdot \cos\vartheta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot H_\varphi\right) = \ldots = A \sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)} \left(k^2 - \frac{jk}{r} - \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{e}_r \frac{1}{r \cancel{\sin\vartheta}} A\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) 2 \cancel{\sin\vartheta} \cos(\vartheta)$$

$$+ \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} A\, e^{j(\omega t - kr)} \sin\vartheta \left(-k^2 + \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = \varepsilon j \omega \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{A}{\omega\varepsilon} \underbrace{e^{j(\omega t - kr)}}_{\text{harmonische Zeitabh.}} \underbrace{\left[\vec{e}_r \left(\frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3}\right) 2\cos\vartheta + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{jk^2}{r} + \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3}\right) \cdot \sin\vartheta\right]}_{\text{komplizierte Ortsabh.}}$$

b) ges: $\vec{H}$ und $\vec{E}$ für großes r

$$r \text{ groß} \Rightarrow \frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2} \gg \frac{1}{r^3}$$

$$\rightarrow \vec{H} = A\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \cancel{\frac{1}{r^2}}\right) \sin\vartheta\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E} \approx \frac{A}{\omega\varepsilon} e^{j(\omega t - kr)} \frac{jk^2}{r} \sin\vartheta\, \vec{e}_\vartheta$$

Es gilt: $k = \frac{\omega}{c} = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon\mu}$ $\Rightarrow \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \underbrace{A\, e^{j(\omega t - kr)} \frac{jk}{r} \sin\vartheta}_{H_\varphi} \vec{e}_\vartheta$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot H_\varphi\, \vec{e}_\vartheta$$

ges: Pointing-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$

$$\vec{H}^* = A\, e^{-j(\omega t - kr)} \frac{-jk}{r} \sin\vartheta\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} E_\vartheta \cdot H_\varphi^* \underbrace{(\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi)}_{\vec{e}_r}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, A\, \cancel{e^{j(\omega t - kr)}}\, \frac{jk}{r} \sin\vartheta \; A\, \cancel{e^{-j(\omega t - kr)}}\, \frac{-jk}{r} \sin\vartheta\, \vec{e}_r$$

$$= 1 \qquad\qquad = 1$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, A^2 \frac{k^2}{r^2} \sin(\vartheta)^2\, \vec{e}_r$$

ges: abgestrahlte mittlere Leistung integriert über Kugeloberfläche

$$\vec{S}_{av} = \mathrm{Re}\{\vec{S}\}$$

$$P = \iint S \, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \frac{A^2 k^2}{2\cancel{r^2}} \sin^2\vartheta\, \vec{e}_r \, \underbrace{\vec{e}_r \cancel{r^2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{d\vec{A}}$$

$$= \cancel{2}\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \frac{A^2 k^2}{\cancel{2}} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, A^2 k^2 \pi \left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, A^2 k^2 \, \frac{4}{3}$$

Aufgabe 29

$$\vec{E}_0 = E_0\, e^{j(\omega t - kz)}\, \vec{e}_y$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_0 = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e}_z}$$

$$= \cancel{+} E_0\, e^{j(\omega t - kz)} (-jk)\,\vec{e}_x$$

$= 0$

$$= -\mu_0 \frac{\partial H_0}{\partial t} = -\mu_0 j\omega \vec{H}_0$$

$$\left(\text{Ansatz: } \vec{H}_0 = H_0\, e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_x \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = j\omega \vec{H}\right)$$

$$E_0\, e^{j(\omega t + kz)}\, jk\,\vec{e}_x = -\mu_0 j\omega H_0\, e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow H_0 = -\frac{k}{\mu_0 \omega} E_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0$$

$$\vec{E}_r = E_r\, e^{j(\omega t + kz)}\, \vec{e}_y$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_r = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x$$

$$= -E_r\, e^{j(\omega t + kz)} (jk)\,\vec{e}_x$$

$$= -\mu_0 j\omega \vec{H}_r$$

$$\left(\text{Ansatz: } \vec{H}_r = H_r\, e^{j(\omega t + kz)}\vec{e}_x\right)$$

$$-E_r\, e^{j(\omega t + kz)}\, jk\,\vec{e}_x = -\mu_0 j\omega H_r\, e^{j(\omega t + kz)}\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow H_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_r$$

Transmittierte Welle: $\vec{E}_t = E_t\, e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_y$

(neu: $K > 0$) ges: $\vec{H}_t$ aus $\mathrm{rot}\, E_t = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$, Wellenwiderstand Γ_t

$$-\vec{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \underbrace{\vec{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x}}_{=0} = \cancel{+}\cancel{\vec{e}_x}\, E_t\, \cancel{e^{j(\omega t - kz)}} (\cancel{+}jk)$$

$$= -\mu_0 j\omega H_t\, \cancel{e^{j(\omega t - kz)}}\, \cancel{\vec{e}_x}$$

$$\Rightarrow H_t = -\frac{k}{\mu_0 \omega} E_t = -\frac{\cancel{\omega}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\left(1 - j\frac{K}{\varepsilon_0\omega}\right)}}{\mu_0 \cancel{\omega}}\, E_t$$

komplexes k

$$= -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1 - j\frac{K}{\varepsilon_0\omega}\right)}}_{1/\Gamma_t\ :\ \text{Wellenwiderstand}}\, E_t$$

$$\Rightarrow \Gamma_t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\left(1-j\frac{\kappa}{\varepsilon_0 \omega}\right)}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}}$$

b) ges: Wellenwiderstand aus komplexem ε:

laut Skript folgt: $\varepsilon_r = 1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0 \omega}$

$$\rightarrow \Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \ldots = \Gamma_1 \text{ von oben}$$

c) Grenzbedingungen: $E_{t1} = E_{t2}$; $H_{t1} = H_{t2}$

(1) $E_0 + E_r = E_t$ $\qquad H_0 + H_r = H_t$

$$\underbrace{-\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_0} E_0 + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_0} E_r = \underbrace{-\sqrt{\frac{\varepsilon_0\left(1-j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_1} E_t \quad (2)$$

wieder wie in A 27: 2 Gl für 2 Unbekannte E_r, E_t

Lösung: $E_r = E_0 \underbrace{\left(\frac{\Gamma_1 - \Gamma_0}{\Gamma_1 + \Gamma_0}\right)}$; $E_t = E_0 \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_0}$

$H_r = \frac{E_0}{\Gamma_0}\left(\ldots \right)$; $H_t = -E_0 \frac{2}{\Gamma_0 + \Gamma_1}$

d) ges: $\vec{E}_t, \vec{H}_t$ in Phase?

$$\vec{E}_t = E_t\, e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_t = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1-\frac{j\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)}\; e^{j(\omega t - kz)} E_t \vec{e}_x$$

$$= -r e^{j\varphi} e^{j(\omega t - kz)} E_t \vec{e}_x = -r e^{j(\omega t + \varphi - kz)} E_t \vec{e}_x$$

$\vec{E}_t$ und $\vec{H}_t$ sind phasenverschoben um φ

$$\varphi = \angle \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1 - \frac{jK}{\varepsilon_0 \omega}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \angle \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1 - \frac{jK}{\varepsilon_0 \omega}\right)$$

$K \gg \omega\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{2} \underbrace{\angle - j\frac{K}{\mu_0 \omega}}_{-90^0}$$

$$\varphi = -45^0$$

e) Die Energie wird über den ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt.

f) $K \to \infty$

$$S_t \to 0$$

$$S_r \to S_0$$

Totalreflektion an sehr guten Leitern ("Spiegel")