Felder und Wellen

WS 2015/2016

Musterlösung zur 12. Übung

28. Aufgabe

$\vec{H}$-Feld in Kugelkoordinaten

$$\vec{H} = A\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta \, \vec{e}_\varphi$$

a) Das $\vec{H}$-Feld beschreibt eine harmonische Welle, es gelten die Maxwellgleichungen mit $\rho = 0, \vec{j} = 0$. Das $\vec{E}$-Feld wird berechnet mit

$$rot\, \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega\varepsilon \vec{E}$$

Das $\vec{H}$-Feld hat nur eine φ-Komponente und hängt nur von r, ϑ ab.

$$rot\, \vec{H} = \vec{e}_r \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(H_\varphi \sin\vartheta \right) - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r H_\varphi \right) = j\omega\varepsilon \vec{E}$$

Das $\vec{E}$-Feld besitzt also eine r- und eine ϑ-Komponente.

$$\begin{aligned} j\omega\varepsilon E_r &= A\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin^2\vartheta \\ &= A\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{r \sin\vartheta} \\ \Rightarrow E_r &= 2 \frac{A}{\omega\varepsilon} e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) \cos\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j\omega\varepsilon E_\vartheta &= -A \sin\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right) \\ &= -A \sin\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{j(\omega t - kr)} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \right) \\ &= -A \sin\vartheta \frac{1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \left(-jk \left(jk + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right) \\ &= -A \sin\vartheta \frac{1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \left(k^2 - \frac{jk}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \\ \Rightarrow E_\vartheta &= \frac{A}{\omega\varepsilon} e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk^2}{r} + \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) \sin\vartheta \end{aligned}$$

b) Für große r dominieren die Terme mit $\frac{1}{r}$.

$$
\begin{aligned}
H_\varphi &\simeq A\,e^{j(\omega t-kr)}\left(\frac{jk}{r}\right)\sin\vartheta\\
E_\vartheta &\simeq \frac{A}{\omega\varepsilon}e^{j(\omega t-kr)}\left(\frac{jk^2}{r}\right)\sin\vartheta\\
E_r &\simeq 0
\end{aligned}
$$

Mit $k=\frac{\omega}{c}$ und $c=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$
\begin{aligned}
H_\varphi &= A\,e^{j(\omega t-kr)}\left(\frac{jk}{r}\right)\sin\vartheta\\
E_\vartheta &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}Ae^{j(\omega t-kr)}\left(\frac{jk}{r}\right)\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

Damit ist $E_\vartheta=\Gamma H_\varphi$ mit $\Gamma=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, äquivalent zu den ebenen Wellen. Die reellen Felder sind, mit $\left(\mathrm{Re}\left\{je^{jx}\right\}=\mathrm{Re}\left\{j\left(\cos x+j\sin x\right)\right\}=-\sin x\right)$:

$$
\begin{aligned}
H_\varphi &= -\frac{Ak}{r}\sin\vartheta\sin(\omega t-kr)\\
E_\vartheta &= -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{Ak}{r}\sin\vartheta\sin(\omega t-kr)
\end{aligned}
$$

Der reelle Poyntingvektor $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ ist, mit $\vec{e}_\vartheta\times\vec{e}_\varphi=\vec{e}_r$

$$
\begin{aligned}
\vec{S} &= E_\vartheta H_\varphi\,\vec{e}_r\\
&= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{A^2k^2}{r^2}\sin^2\vartheta\sin^2(\omega t-kr)\,\vec{e}_r
\end{aligned}
$$

Der zeitliche Mittelwert davon ist

$$
\overline{\vec{S}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{A^2\omega^2}{2c^2r^2}\sin^2\vartheta\,\vec{e}_r
$$

Der komplexe Poyntingvektor $\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$

$$
\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}Ae^{j(\omega t-kr)}\left(\frac{jk}{r}\right)\sin\vartheta\vec{e}_\vartheta\times A\,e^{-j(\omega t-kr)}\left(\frac{-jk}{r}\right)\sin\vartheta\;\vec{e}_\varphi\\
&= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{A^2\omega^2}{2c^2r^2}\sin^2\vartheta\,\vec{e}_r
\end{aligned}
$$

Der komplexe Poyntingvektor ist reell und gleich dem zeitlichen Mittelwert des reellen Poynting-Vektors. Allgemein

$$
\overline{\vec{S}}=\Re(\vec{S})
$$

Die abgestrahlte mittlere Leistung ist:

$$
\begin{aligned}
P = \oint \vec{S} d\,\vec{f} &= \iint S \;\; r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{A^2\omega^2}{2c^2r^2} 2\pi r^2 \int_0^\pi sin^3\vartheta \;\, d\vartheta \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{A^2\omega^2}{2c^2} 2\pi \left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta \right]_0^\pi \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{A^2\omega^2}{c^2} \pi \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{A^2\omega^2}{c^2} \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

29. Aufgabe

Hinlaufende Welle:

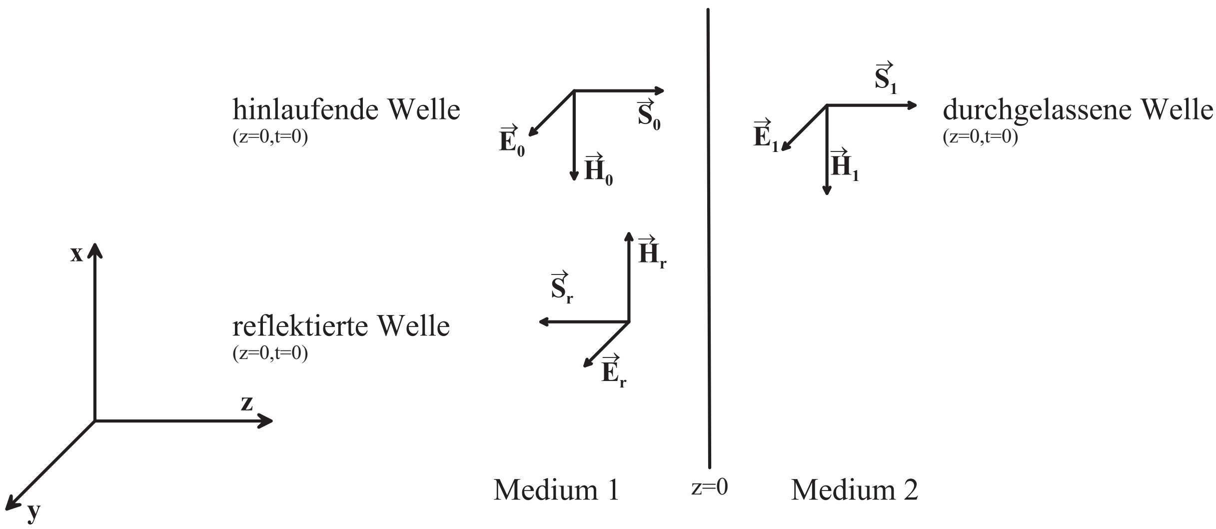
$$
\begin{aligned}
\vec{E}_0 &= E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y \\
\vec{H}_0 &= H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x
\end{aligned}
$$

Reflektierte Welle:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_r &= E_r e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_y \\
\vec{H}_r &= H_r e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_x
\end{aligned}
$$

Durchgelassene Welle:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= E_1 e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_y \\
\vec{H}_1 &= H_1 e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_x
\end{aligned}
$$



a) Die Wellenzahl im leitfähigen Medium ist (Skript Kapitel 9.3.2):

$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\left(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)}$$

Verwendet man

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

und setzt ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
jk_1E_1 &= -j\omega\mu_0H_1 \\
E_1 &= -\frac{\omega\mu_0}{k_1}H_1 \\
E_1 &= -\frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\left(1 - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)}}H_1 \\
E_1 &= -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}}H_1
\end{aligned}$$

und

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}}$$

b) Mit dem Ansatz

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}$$

und den Gleichungen von Kapitel 9.4.2.1

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}$$

erhält man ebenfalls:

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}}$$

c) Die Beziehung zwischen den H und E-Feldern der noch nicht betrachteten Bereiche erhält man analog zu Aufgabe a).

$$\begin{aligned}
E_0 &= -\mathit{\Gamma}_0H_0 \\
E_r &= \mathit{\Gamma}_0H_r \\
E_1 &= -\mathit{\Gamma}_1H_1
\end{aligned}$$

Es gelten wieder die Stetigkeitsbedingungen für das E- und H-Feld:

$$E_0 + E_r = E_1 \tag{1}$$
$$H_0 + H_r = H_1 \tag{2}$$

Eliminiert man H aus der unteren Gleichung erhält man:

$$-\frac{E_0}{\Gamma_0}+\frac{E_r}{\Gamma_0}=-\frac{E_1}{\Gamma_1} \tag{3}$$

Aus (1) folgt:

$$E_r = E_1 - E_o \tag{4}$$

in (3) eingesetzt:

$$-\frac{E_0}{\Gamma_0}+\frac{E_1-E_0}{\Gamma_0}=-\frac{E_1}{\Gamma_1} \tag{5}$$

$$-\frac{2E_0}{\Gamma_0}=-E_1\left(\frac{1}{\Gamma_0}+\frac{1}{\Gamma_1}\right) \tag{6}$$

$$E_1=2E_0\frac{1}{\Gamma_0\left(\frac{1}{\Gamma_0}+\frac{1}{\Gamma_1}\right)} \tag{7}$$

$$E_1=E_0\frac{2\Gamma_1}{\Gamma_0+\Gamma_1} \tag{8}$$

Und in (4) eingesetzt, erhält man:

$$E_r=E_0\left(\frac{2\Gamma_1}{\Gamma_0+\Gamma_1}-1\right)=E_0\frac{\Gamma_1-\Gamma_0}{\Gamma_0+\Gamma_1} \tag{9}$$

Damit lassen sich auch die H-Felder direkt angeben:

$$H_1=-E_0\frac{2}{\Gamma_0+\Gamma_1} \tag{10}$$

$$H_r=\frac{E_0}{\Gamma_0}\frac{\Gamma_1-\Gamma_0}{\Gamma_0+\Gamma_1} \tag{11}$$

d) Der Phasewinkel φ zwischen H und E ist durch den Phasenwinkel des komplexen Wellenwiderstandes gegeben.

$$\varphi=\measuredangle(\Gamma_1)=\measuredangle\left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0-j\frac{\kappa}{\omega}}}\right)=-\measuredangle\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}-j\frac{\kappa}{\mu_0\omega}}\right)$$

Hier wurde ausgenutzt, dass sich das Phasenvorzeichen ändert, wenn man den Kehrwert einer komplexen Zahl nimmt. Die Wurzel ändert die Phase um $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\varphi&=-\frac{1}{2}\measuredangle\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}-j\frac{\kappa}{\mu_0\omega}\right)\\&=-\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega}\right)\end{aligned}$$

Für $\kappa \gg \varepsilon_0\omega$ (gute Leitfähigkeit) erhält man:

$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$

Also eine Phasenverschiebung von 45°.

d) Zerlegt man die komplexe Wellenzahl in Real- und Imaginärteil, dann kann man schreiben:

$$k_1 = k_R - jk_I$$

Hier wurde ein Minuszeichen verwendet, da die Wellenzahl k_1 einen negativen Imaginärteil hat. Berechnet man demit das E-Feld, erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_1 e^{j(\omega t - (k_R - jk_I)z)}\ \vec{e}_y \\ &= E_1 e^{j(\omega t - k_R z)} e^{-k_I z}\ \vec{e}_y\end{aligned}$$

Die Welle wird im Medium stark gedämpft. Die Energie wird über den Ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt.

f) Energiedichtebilanz

Für eine Energiedichtebilanz werden zunächst die komplexen Pointingvektoren $S = \frac{1}{2} E H^*$ berechnet:

$$\begin{aligned}S_0 &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mathit{\Gamma}_0} \\ S_r &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mathit{\Gamma}_0}\frac{\mathit{\Gamma}_1 - \mathit{\Gamma}_0}{\mathit{\Gamma}_1 + \mathit{\Gamma}_0}\frac{\mathit{\Gamma}_1^* - \mathit{\Gamma}_0}{\mathit{\Gamma}_1^* + \mathit{\Gamma}_0} \\ S_1 &= \frac{1}{2}E_0^2 \frac{4\mathit{\Gamma}_1}{(\mathit{\Gamma}_1 + \mathit{\Gamma}_0)(\mathit{\Gamma}_1^* + \mathit{\Gamma}_0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_r + S_1 &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mathit{\Gamma}_0}\frac{\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_1^* - \mathit{\Gamma}_0\mathit{\Gamma}_1 - \mathit{\Gamma}_0\mathit{\Gamma}_1^* + \mathit{\Gamma}_0^2 + 4\mathit{\Gamma}_0\mathit{\Gamma}_1}{\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_1^* + \mathit{\Gamma}_0\mathit{\Gamma}_1 + \mathit{\Gamma}_0\mathit{\Gamma}_1^* + \mathit{\Gamma}_0^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mathit{\Gamma}_0}\frac{\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_1^* - 2\mathit{\Gamma}_0\ \mathrm{Re}\{\mathit{\Gamma}_1\} + \mathit{\Gamma}_0^2 + 4\mathit{\Gamma}_0\left(\ \mathrm{Re}\{\mathit{\Gamma}_1\} + j\ \mathrm{Im}\{\mathit{\Gamma}_1\}\right)}{\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_1^* + 2\mathit{\Gamma}_0\ \mathrm{Re}\{\mathit{\Gamma}_1\} + \mathit{\Gamma}_0^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mathit{\Gamma}_0}\frac{\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_1^* + 2\mathit{\Gamma}_0\ \mathrm{Re}\{\mathit{\Gamma}_1\} + \mathit{\Gamma}_0^2 + j4\mathit{\Gamma}_0\ \mathrm{Im}\{\mathit{\Gamma}_1\}}{\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_1^* + 2\mathit{\Gamma}_0\ \mathrm{Re}\{\mathit{\Gamma}_1\} + \mathit{\Gamma}_0^2}\end{aligned}$$

Für die Realteile der Pointingvektoren muss die Energiedichtebilanz gelten:

$$\mathrm{Re}\{S_0\} = \mathrm{Re}\{S_r + S_1\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{S_0\} &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mathit{\Gamma}_0} \\ \mathrm{Re}\{S_r + S_1\} &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mathit{\Gamma}_0}\frac{\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_1^* + 2\mathit{\Gamma}_0\ \mathrm{Re}\{\mathit{\Gamma}_1\} + \mathit{\Gamma}_0^2}{\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_1^* + 2\mathit{\Gamma}_0\ \mathrm{Re}\{\mathit{\Gamma}_1\} + \mathit{\Gamma}_0^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mathit{\Gamma}_0}\end{aligned}$$

Betrachtet man einen sehr guten Leiter mit $\kappa \longrightarrow \infty$ erhält man:

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to\infty}\mathit{\Gamma}_1 = \lim_{\kappa\to\infty}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\kappa}{\omega}}} = 0 \\ \Rightarrow S_r = S_0 \qquad S_1 = 0\end{aligned}$$

Es erfolgt also eine Totalreflexion. Metalle sind daher gute Reflektoren.