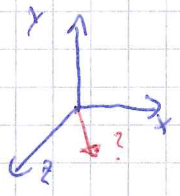
Felder und Wellen Übung 13

Ebene Wellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung

Bisher: Ebene Wellen entlang der Koordinatenachsen

z.B. entlang z: $\vec{E} = \vec{E}(z,t) = E_0 \, e^{j(\omega t - kz)} \, \vec{e}_y$

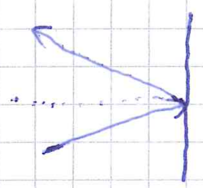
x: $\vec{E} = \vec{E}(x,t) = E_0 \, e^{j(\omega t - kx)} \, \vec{e}_z$



Wie kann man die Welle beschreiben, die in Richtung

$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ läuft?

1) Koordinatentransformation: hilft nicht bei Reflektion



2) Vektorielle Wellenzahl $\vec{k}$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Welle in z-Richtung: $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = k\vec{e}_z \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = k z \underbrace{\vec{e}_z \vec{e}_z}_{=1}$

x-Richtung: $\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k\vec{e}_x \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = k x \underbrace{\vec{e}_x \vec{e}_x}_{=1}$

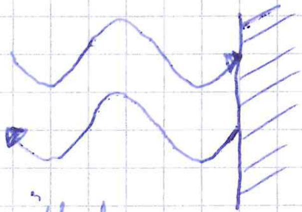
in $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ - Richtung: $\vec{k} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = k \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x \underbrace{\vec{e}_x \vec{e}_x}_{=1} + z \underbrace{\vec{e}_z \vec{e}_z}_{=1} \right) = \frac{k}{\sqrt{2}} (x + z)$$

$$\vec{E} = E_0 \, e^{i\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(x+z)\right)} = \vec{E}(x, z, t)$$

Hohlleiter, TM-/TE-Wellen

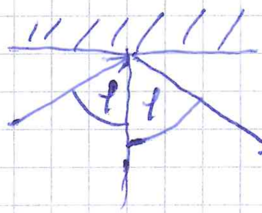
- Wellen werden an idealen Leitern vollständig reflektiert (vgl. A 29)



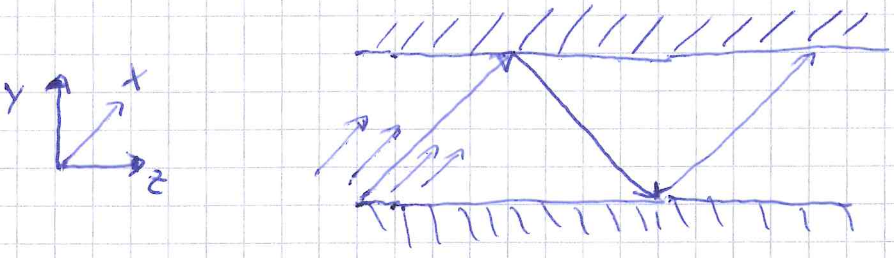
Überlagerung

- Stehende Welle mit Schwingungsknoten und -bäuchen.

- Ausfallswinkel = Einfallswinkel



- Was geschieht in einem Hohlleiter?



- Die Wellenausbreitung im Hohlleiter lässt sich als Überlagerung von ebenen Wellen beschreiben, die an den Wänden reflektiert werden.

Die entstehende Welle breitet sich in z-Richtung aus und verhält sich senkrecht dazu, wie eine stehende Welle.

TM-Wellen: Transversal-Magnetisch → hat longitudinale (z-) Komponente E_z aber $H_z = 0$

TE-Wellen: Transversal-Elektrisch → hat longitudinale (z-) Komponente H_z aber $E_z = 0$

Berechnung für rechteckige Hohlleiter:

- Wellengleichung für TE-/TM-Wellen aufstellen
- betrachte nur E_z oder H_z
- Separation der Variablen wie bei Laplace-Gl. für Φ
- Randbedingungen: $E_t = 0$ am leitenden Rand
- aus E_z oder H_z können die anderen Größen bestimmt werden (Skript 9.6.3 / 9.6.4) TA. 31

Aufgabe 30

Bisher: Welle trifft senkrecht auf Medium
ges: Amplituden der Felder von rücklaufender und transmittierter Welle

Jetzt: Einfallswinkel $\Phi_e \neq 0$
ges: Amplituden und Winkel der rücklaufenden und transmittierten Welle
neu: Phänomen der "Totalreflexion"

a) Betrachte: $\vec{r} = x\vec{e}_x$ (Ort auf Grenzfläche)
ges: Φ_r ; Φ_d

Ansatz: Stetigkeitsbed. des $\vec{E}$-Feldes $E_{t1} = E_{t2}$

$\vec{E}$ - Feld zeigt in y-Richtung

$\Rightarrow$ komplettes $\vec{E}$ zeigt tangential

$$E_{e,y} + E_{r,y} = E_{d,y}$$

$$\Rightarrow E_e\, e^{j(\omega t - \vec{k}_e \vec{r})} + E_r\, e^{j(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})} = E_d\, e^{j(\omega t - \vec{k}_d \vec{r})}$$

$t = 0$; $\vec{r} = x\, \vec{e}_x$

$$\Rightarrow E_e\, e^{-j k_1 \sin(\Phi_e) x} + E_r\, e^{-j k_1 \sin(\Phi_r) x} = E_d\, e^{-j k_2 \sin(\Phi_d) x}$$

$$A e^{D_1 x} + B e^{D_2 x} = C e^{D_3 x}$$

nur lösbar, wenn $D_1 = D_2 = D_3$ $\Rightarrow (A+B)\, e^{D_1 x} = C e^{D_1 x}$

$\Rightarrow A + B = C$

$\Rightarrow$ aus $D_1 = D_2$ $\boxed{\Phi_r = \Phi_e}$

$$D_1 = D_3 \Rightarrow -j k_1 \sin(\Phi_e) = -j k_2 \sin(\Phi_d)$$

$$\Rightarrow \sin(\Phi_d) = \frac{k_1}{k_2} \sin(\Phi_e) \Rightarrow \Phi_d = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_2} \sin(\Phi_e)\right)$$

b) ges.: $\vec{H} = \frac{1}{\Gamma} \vec{e}_k \times \vec{E}$ $\quad \vec{E} = E_y\, \vec{e}_y$

Für einfallende und transmittierte Welle gilt:

$$\vec{e}_k = \cos(\Phi)\, \vec{e}_z + \sin(\Phi)\, \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{e/d} = \frac{1}{\Gamma} E_y \cdot \left(\cos(\Phi) \vec{e_z} + \sin(\Phi) \vec{e_x} \right) \times \vec{e_y}$$

$$= \frac{E_y}{\Gamma} \left(-\cos(\Phi) \vec{e_x} + \sin(\Phi) \vec{e_z} \right)$$

für reflektierte Welle: $\vec{e_k} = -\cos(\Phi_r) \vec{e_z} + \sin(\Phi_r) \vec{e_x}$

$$\Rightarrow \vec{H_r} = \frac{E_{r,y}}{\Gamma_1} \left(+\cos(\Phi_r) \vec{e_x} + \sin(\Phi_r) \vec{e_z} \right)$$

c) ges: E_r, E_d

Stetigkeitsbedingungen: $E_{t1} = E_{t2}$; $H_{t1} = H_{t2}$ $H_t = H_x$

aus a) $E_e + E_r = E_d$ (1)

$$H_e + H_r = H_d \Rightarrow \frac{E_e}{\Gamma_1} (-\cos\Phi_e) + \frac{E_r}{\Gamma_1} (\cos\Phi_r) \quad (2)$$

$$= \frac{E_d}{\Gamma_2} (-\cos\Phi_d)$$

wieder 2 Gl mit 2 Unbekannten (E_r, E_d)

$$\Rightarrow E_r = \frac{\Gamma_2 \cos\Phi_e - \Gamma_1 \cos\Phi_d}{\Gamma_2 \cos\Phi_e + \Gamma_1 \cos\Phi_d} \cdot E_e$$

$$E_d = \frac{2\Gamma_2 \cos\Phi_e}{\Gamma_1 \cos\Phi_d + \Gamma_2 \cos\Phi_e} \cdot E_e$$

d) Gl. aus a) $\sin\Phi_d = \frac{k_1}{k_2} \sin\Phi_e \leq 1$ dann Lösung für Φ_d

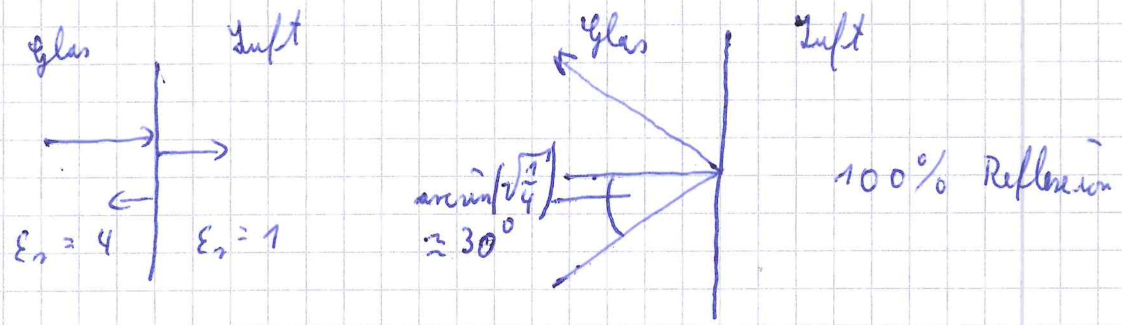
$$\Rightarrow \sin\Phi_e \leq \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}_{>1}$$

>1, da Medium 2 dichter als Medium 1

→ immer erfüllt! Hier: Für jedes Φ_e existiert ein reelles Φ_d

wenn $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ dann wäre $\Phi_{e,\text{kritisch}} = \arcsin\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$

Bsp:



Aufgabe 31

a) Wellengleichung: $\Delta \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$; $\frac{\partial}{\partial t}(..) = j\omega(..)$

$$\rightarrow \text{FS.} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2}}}_{=0} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \mu\varepsilon\omega^2 \vec{E} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial y} = 0$, da Anordnung unendlich in y-Richtung ausgedehnt ist.

longitudinale Komponente:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\varepsilon E_z = 0$$ Lösung der DGL?

↳ Ansatz wie bei Laplace-Gl. für Φ in ÜB 6

$$E_z(x, \cancel{y}, z, t) = U(x) \cdot \cancel{V(y)} \cdot W(z,t) \quad \text{(Separationsansatz)}$$

da keine y-Abh.

mit $w(z,t) = e^{j(\omega t - k_z z)}$ (harmonischer Ansatz)

$$\frac{\partial^2 E_z(x,z,t)}{\partial z^2} = (-j k_z)^2 \cdot E_z(x,z,t) = -k_z^2 \, E_z(x,z,t)$$

$$\frac{\partial^2 U(x) \cdot w(z,t)}{\partial x^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) \, U(x) \, W(z,t) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{U(x) \, W(z,t)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{U(x)} \cdot \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}}_{= f(x)} + \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ muss konstant sein $= -k_x^2$ $\Rightarrow$ $\omega^2 \mu \varepsilon = k_z^2 + k_x^2$

$$\frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = -k_x^2$$

Lösung von $U(x)$ s. ÜB 6 oder Skript

$$\Rightarrow U(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

$$\boxed{\Rightarrow E_z(x,z,t) = [A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)] \, e^{j(\omega t - k_z z)}}$$

Randbed.: $E_{tan} = 0$ am Rand $\Rightarrow$ $E_z = 0$ am Rand

$$E_z(x=0) = E_z(x=a) = 0$$

$$E_z(x=0) = [A \underbrace{\sin(0)}_{=0} + B \underbrace{\cos(0)}_{=1}] \cdot \underbrace{e^{j(\dots)}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$E_z(x=a) = \underset{\neq 0}{A} \sin(k_x a)\, \underbrace{e^{j(\ldots)}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \sin(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x a = n\pi \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$E_z = A \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mit Skript 9.6.3

$$\Rightarrow E_x = \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$= \frac{-j k_z a}{n\pi} A \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{\omega^2 \varepsilon\mu - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{-j\omega\varepsilon a}{n\pi} A \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$