

Felder und Wellen

WS 2015/2016

Musterlösung zur 13. Übung

30. Aufgabe

Hinlaufende Welle:

$$\begin{aligned}\vec{E}_e &= E_e e^{j(\omega t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})} \vec{e}_y \\ \vec{k}_e &= k_1 (\cos \phi_e \vec{e}_z + \sin \phi_e \vec{e}_x)\end{aligned}$$

Reflektierte Welle:

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= E_r e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{e}_y \\ \vec{k}_r &= k_1 (-\cos \phi_r \vec{e}_z + \sin \phi_r \vec{e}_x)\end{aligned}$$

Durchgelassene Welle:

$$\begin{aligned}\vec{E}_d &= E_d e^{j(\omega t - \vec{k}_d \cdot \vec{r})} \vec{e}_y \\ \vec{k}_d &= k_2 (\cos \phi_d \vec{e}_z + \sin \phi_d \vec{e}_x)\end{aligned}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \text{ und } \Gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

a) Die Tangentialkomponente muss stetig sein ($t = 0$ und $\vec{r} = x \vec{e}_x$):

$$E_e e^{-jk_1 \sin \phi_e x} + E_r e^{-jk_1 \sin \phi_r x} = E_d e^{-jk_2 \sin \phi_d x}$$

Die Gleichung ist nichtlinear in x und kann nur für alle x erfüllt sein wenn gilt:

$$-jk_1 \sin \phi_e x = -jk_1 \sin \phi_r x = -jk_2 \sin \phi_d x$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}\phi_r &= \phi_e \\ \sin \phi_d &= \frac{k_1}{k_2} \sin \phi_e\end{aligned}$$

b) Mit $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$ und $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ erhält man schnell:

$$\begin{aligned}
\vec{H}_e &= \frac{1}{\Gamma} \vec{e}_{k_e} \times \vec{E} \\
&= \frac{1}{\Gamma_1} E_e (-\cos \phi_e \vec{e}_x + \sin \phi_e \vec{e}_z) \\
\vec{H}_d &= \frac{1}{\Gamma_2} E_d (-\cos \phi_d \vec{e}_x + \sin \phi_d \vec{e}_z) \\
\vec{H}_r &= \frac{1}{\Gamma_1} E_r (\cos \phi_r \vec{e}_x + \sin \phi_r \vec{e}_z)
\end{aligned}$$

c) Stetigkeitsbedingungen für $t = 0$ und $\vec{r} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}
E\text{-tangential} &\Rightarrow E_e + E_r = E_d \\
H\text{-tangential} &\Rightarrow -\frac{1}{\Gamma_1} E_e \cos \phi_e + \frac{1}{\Gamma_1} E_r \cos \phi_r = -\frac{1}{\Gamma_2} E_d \cos \phi_d \\
B\text{-orthogonal} &\Rightarrow \left(\frac{1}{\Gamma_1} E_e \sin \phi_e + \frac{1}{\Gamma_1} E_r \sin \phi_r = \frac{1}{\Gamma_2} E_d \sin \phi_d \right)
\end{aligned}$$

Setzt man die Winkelrelationen aus a) ein, wird die letzte Gleichung gleich der ersten. Es bleibt also folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned}
E_e + E_r &= E_d \\
-E_e \cos \phi_e + E_r \cos \phi_e &= -\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} E_d \cos \phi_d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_r &= E_d - E_e \\
\Rightarrow -E_e \cos \phi_e + (E_d - E_e) \cos \phi_e &= -\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} E_d \cos \phi_d \\
\Rightarrow 2E_e \cos \phi_e &= \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} E_d \cos \phi_d + E_d \cos \phi_e \\
\Rightarrow E_d &= \frac{2 \cos \phi_e}{\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \cos \phi_d + \cos \phi_e} E_e \\
\Rightarrow E_d &= \frac{2\Gamma_2 \cos \phi_e}{\Gamma_1 \cos \phi_d + \Gamma_2 \cos \phi_e} E_e \\
\Rightarrow E_r &= \left(\frac{2\Gamma_2 \cos \phi_e}{\Gamma_1 \cos \phi_d + \Gamma_2 \cos \phi_e} - 1 \right) E_e \\
\Rightarrow E_r &= \frac{\Gamma_2 \cos \phi_e - \Gamma_1 \cos \phi_d}{\Gamma_2 \cos \phi_e + \Gamma_1 \cos \phi_d} E_e
\end{aligned}$$

c) Der kritische Winkel wird erreicht, wenn $\sin \phi_e \frac{k_1}{k_2} > 1$. In diesem Fall kann kein reelles ϕ_d die Bedingungen erfüllen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn Medium

1 optisch dichter als Medium 2 ist, also $\varepsilon_{r1} \geq \varepsilon_{r2}$. In diesem Fall gilt:

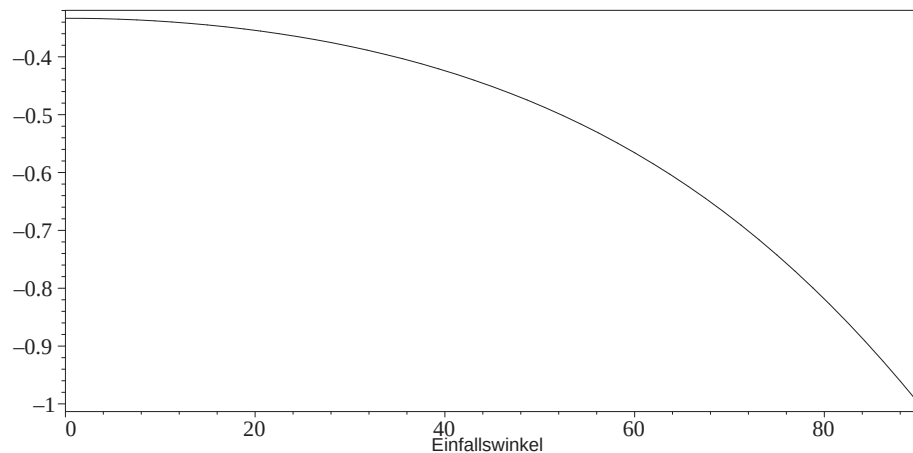
$$\sin \phi_e \frac{k_1}{k_2} > 1$$

$$\sin \phi_e > \frac{k_2}{k_1}$$

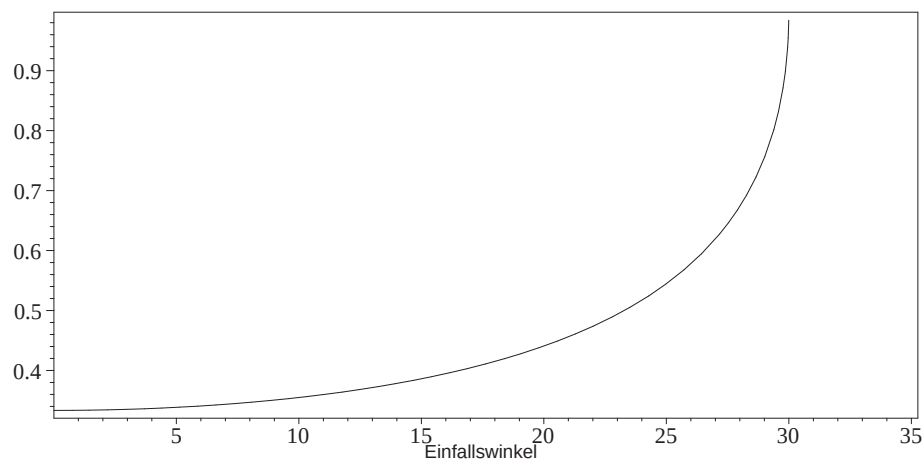
$$\phi_{e,kritisch} = \arcsin \frac{k_2}{k_1}$$

Hinweis: Für den Fall $\phi_e \geq \phi_{e,kritisch}$ tritt Totalreflexion ein. Jedoch ist auch in diesem Fall im zweiten Medium eine exponentiell abfallende Welle vorhanden, da sonst die Stetigkeitsbedingungen verletzt wären. Die Lösung kann über einen komplexen Ansatz für ϕ_d hergeleitet werden. ϕ_d kann dann allerdings nicht mehr als Winkel interpretiert werden.

Beispiele: Bei Reflexion an einem optisch dichteren Medium, z.B. beim Übergang von Luft nach Glas ergibt sich folgendes Verhältnis von E_r/E_e ($\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1} = 4$):



Bei Reflexion an einem optisch dünnerem Medium, z.B. beim Übergang von Glas nach Luft ergibt sich folgendes Verhältnis von E_r/E_e ($\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1} = 1/4$):



Ab ca. 30° erhält man Totalreflexion. Daher werden z.B. Prismen in der Optik als Spiegel verwendet.

31. Aufgabe

Die Felder im Wellenleiter haben die Form

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}_0(x, y) e^{j(\omega t - k_z z)} \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{H}_0(x, y) e^{j(\omega t - k_z z)}\end{aligned}$$

Skript Kapitel 9.6.3: für TM-Wellen gilt (Berechnet werden $\vec{E}_0$ und $\vec{H}_0$, der Subskript 0 wird weggelassen)

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ E_y &= \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_x &= \frac{j\omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_y &= \frac{-j\omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial y} = 0$ wegen der unendlich Ausdehnung in y -Richtung $\Rightarrow$ nur E_x und H_y existieren.

a) Wellengleichung für E_z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) E_z = 0$$

Mit $k_x^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2$ haben die Lösungen dieser Gleichung die Form

$$E_z = A \sin k_x x + B \cos k_x x$$

E_z ist die Tangentialkomponente des $\vec{E}$ -Feldes. Für $x = 0$ und $x = a$ gilt die Randbedingung $E_z = 0$

$$E_z = 0 \quad \text{für } x = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$E_z = 0 \quad \text{für } x = a \Rightarrow A = 0 \quad (\text{kein Feld})$$

oder

$$k_x a = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a}$$

$$E_z = A \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Aus E_z werden die transversalen Komponenten der Felder berechnet

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{-jk_z}{k_x^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{-jk_z}{k_x} A \cos k_x x = \frac{-jk_z a}{n\pi} A \cos \frac{n\pi x}{a} \\ H_y &= \frac{-j\omega \varepsilon}{k_x^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{-j\omega \varepsilon}{k_x} A \cos k_x x = \frac{-j\omega \varepsilon a}{n\pi} A \cos \frac{n\pi x}{a}\end{aligned}$$

b) Berechnung von k_z

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2 &= k_x^2 \\
 \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2 &= \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \\
 k_z^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \\
 k_z &= \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2} \\
 k_z &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}
 \end{aligned}$$

k_z wird als positiv angenommen, negatives k_z ändert nur die Ausbreitungsrichtung. Eine Welle existiert nur, wenn k_z reell ist.

$$\begin{aligned}
 k_z &= \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2} \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \\
 \Rightarrow \omega &> \frac{n\pi}{a} \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}
 \end{aligned}$$

Es gibt also eine sogenannte Cut-Off-Frequenz ω_c , unterhalb der keine Wellenausbreitung möglich ist. Die Cut-Off-Frequenz hängt von der Dimension a und der Modennummer n ab.

$$\omega_{cn} = \frac{n\pi}{\sqrt{\mu \varepsilon} a} = \frac{n\pi c_0}{a}$$

c) Phasengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{\omega}{k_z} \\
 &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi c_0}{a} \right)^2}} \\
 &= \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c_0}{\omega a} \right)^2}} > c_0
 \end{aligned}$$

c_0 ist die Lichtgeschwindigkeit im Medium zwischen den Platten. Berechnung der Gruppengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 v_g &= \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}} \\
 &= \left(2\mu \varepsilon \omega \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}} \right)^{-1} \\
 &= \frac{c_0^2}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2} \\
 &= c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c_0}{\omega a} \right)^2} < c_0
 \end{aligned}$$

Es gilt $c v_g = c_0^2$. Die Gruppengeschwindigkeit ist demnach kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit und die Phasengeschwindigkeit ist größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

d) Leistungsdichte der Moden: Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \Re (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \Re ((E_x \vec{e}_x + E_z \vec{e}_z) \times H_y^* \vec{e}_y)$$

Der Poynting-Vektor besteht aus zwei Teilen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Re (E_x \vec{e}_x \times H_y^* \vec{e}_y) &= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{-jk_z a}{n\pi} A \cos \frac{n\pi x}{a} e^{j(\omega t - k_z z)} \cdot \frac{j\omega \varepsilon a}{n\pi} A \cos \frac{n\pi x}{a} e^{-j(\omega t - k_z z)} (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{k_z \omega \varepsilon a^2}{n^2 \pi^2} A^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{a} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Energie wird in z -Richtung transportiert.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Re (E_z \vec{e}_z \times H_y^* \vec{e}_y) &= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{jk_z a}{n\pi} A^2 \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \vec{e}_x \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

E_z ist reell, H_y imaginär. In x Richtung wird keine Energie transportiert (nur Blindleistung).

Zusatz: Wieso kann die Phasengeschwindigkeit größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit sein?

Betrachtet man nochmal das E-Feld der TM-Welle in vektorieller Form, erhält man:

$$\vec{E} = A \begin{pmatrix} -j \frac{k_z}{k_x} \cos k_x x \\ 0 \\ \sin k_x x \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Mit

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{-j}{2} (e^{jx} - e^{-jx}) \\ \cos x &= \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \end{aligned}$$

lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= A \begin{pmatrix} \frac{-j}{2} \frac{k_z}{k_x} (e^{jk_x x} + e^{-jk_x x}) \\ 0 \\ \frac{-j}{2} (e^{jk_x x} - e^{-jk_x x}) \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_z z)} \\ \vec{E} &= \frac{-jA}{2} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{k_z}{k_x} e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \\ 0 \\ -e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \end{pmatrix}}_{\text{Welle I}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{k_z}{k_x} e^{j(\omega t + k_x x - k_z z)} \\ 0 \\ e^{j(\omega t + k_x x - k_z z)} \end{pmatrix}}_{\text{Welle II}} \right] \end{aligned}$$

Die TM-Welle lässt sich in zwei schräg laufende Wellen I und II zerlegen. Die Wellenzahl wird bei schräg laufenden Wellen zu einem Wellenvektor:

Welle I:

$$\vec{E}_I = \frac{-jA}{2} \begin{pmatrix} \frac{k_z}{k_x} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \vec{r} \cdot \vec{k}_I)}$$

$$\vec{k}_I = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

Welle II:

$$\vec{E}_{II} = \frac{-jA}{2} \begin{pmatrix} \frac{k_z}{k_x} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \vec{r} \cdot \vec{k}_{II})}$$

$$\vec{k}_{II} = \begin{pmatrix} -k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

Die Wellenvektoren stehen senkrecht auf dem E-Feld und sind parallel zum Poin-tingvektor. Dies lässt sich zeigen, indem man das Skalarprodukt zwischen E-Feld und Wellenvektor bildet:

$$\vec{E}_I \cdot \vec{k}_I \sim \left(\frac{k_z}{k_x} k_x - k_z \right) = 0 \Rightarrow \vec{E}_I \perp \vec{k}_I$$

$$\vec{E}_{II} \cdot \vec{k}_{II} \sim \left(-\frac{k_z}{k_x} k_x + k_z \right) = 0 \Rightarrow \vec{E}_{II} \perp \vec{k}_{II}$$

Berechnet man den Betrag des Wellenvektors, erhält man:

$$|\vec{k}_I| = |\vec{k}_{II}| = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

$$= \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{c_0}$$

Daraus folgt für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten:

$$c_I = c_{II} = \frac{\omega}{|\vec{k}_I|} = c_0$$

$$v_{gI} = v_{gII} = \frac{d\omega}{d|\vec{k}_I|} = \left(\frac{d|\vec{k}_I|}{d\omega} \right)^{-1} = c_0$$

Das Ergebnis kann wie folgt interpretiert werden: Die Phase der TM-Welle in z-Richtung kann als Überlagerung zweier ebener Vakuumswellen betrachtet werden, die an den Wänden reflektiert werden. Die Phase der TM-Welle ist also nichts weiter als das Interferenzmuster, welches sich mit $c > c_0$ auszubreiten scheint. Anhand der Abbildung unten ist aber anschaulich klar, dass sich ein Wellenpaket nur mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g < c_0$ in z-Richtung ausbreiten kann, da die Wellen aufgrund des schrägen Einfalls einen längeren Weg zurücklegen müssen.

