

# Felder und Wellen Übung 14

Fortsetzung A 3-1

a) ges:  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$

Vorgehen: Wellengleichung für  $E_z$  (da TM-Wellen, d.h.  $H_z = 0$ )

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) E_z = 0$$

= 0 wegen unendlicher Ausdehnung in y-Richtung

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$   $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Separationsansatz:  $E_z(x, z, t) = u(x) \cdot w(z, t)$

Wellenansatz:  $w(z, t) = e^{j(\omega t - k_z z)}$

$$u(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

Randbedingungen  $\Rightarrow B = 0$   $k_x = \frac{n\pi}{a}$   $n \in \mathbb{N}$   
 $E_{\tan} = 0$  am Rand  $\leftarrow$  Plattenabstand

$$\Rightarrow E_z(x, z, t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mit Skript 9.6.3  $\Rightarrow E_x = \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}$

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

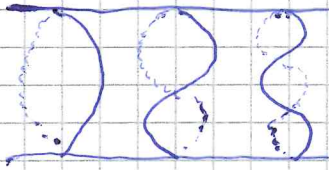
$$= \frac{-j k_z}{k_x^2} \cdot A \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \left(\frac{n\pi}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$E_y = \dots \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$$



$$b) \text{ ges. } k_z \text{ aus a) } \Rightarrow k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_x^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

erwichtig: 1)  $A$  und  $\omega$  werden von außen vorgegeben  
 $n$  bel. Werte annehmen. Tatsächlich ergibt sich  
 eine Überlagerung aus all diesen Moden. Jeder  
 Mode hat ein anderes  $k_x$  und  $k_z$   
 (da diese abh. von  $n$ !)



Im Rechteckhohlleiter werden die Moden durch  
 zwei Zahlen  $n, m$  beschrieben. Unterschiedliche Moden  
 haben unterschiedliche Gruppen- und Phasengeschwin-  
 digkeiten.

2) Wellenausbreitung nur für  $k_z$  reell möglich!

$$\text{sonst } E_z \sim e^{i\omega t} \underbrace{e^{-k_z z}}_{\text{Dämpfung}} \quad \text{flüssig}$$

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \stackrel{!}{=} \text{reell} \rightarrow \omega^2 \mu \epsilon > \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

$$\rightarrow \omega > \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left(\frac{n\pi}{a}\right)$$

$\Rightarrow$  Der Mode  $n=1$  kann sich ausbreiten, wenn

$$\omega > \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{\pi}{a} \quad \text{cut-off-Frequenz}$$

Mode  $n=2$ :

$$\omega > \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{2\pi}{a}$$

$\Rightarrow$  Für ein bestimmtes  $\omega$  können sich nur eine begrenzte Anzahl von  
 Moden ausbreiten!



$$f_{\min} = \text{kleinste cut-off-Frequenz} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{Bsp: } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n \cdot c_0}{2a}$$

$$; a = 3 \text{ cm} \quad c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow f = 5 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 5 \text{ GHz}$$

c) ges: Phasengeschwindigkeit (wie schnell ändert sich ein Ort gleicher Phase)

$$v = \frac{\omega}{kz} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{\omega a}\right)^2}} = \dots = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \underbrace{\left(\frac{n\pi c_0}{\omega a}\right)^2}_{>0}}} > c_0$$

- Vakuumlichtgeschwindigkeit

ges: Gruppengeschwindigkeit (wie schnell breitet sich Energie / Information aus?)

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial kz} = \frac{1}{\frac{\partial kz}{\partial \omega}} = \frac{1}{k \sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\omega \sqrt{\mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} = \dots = c_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c_0}{\omega a}\right)^2} < c_0$$

Die Phasengeschwindigkeit kann schneller sein als die Lichtgeschwindigkeit. Sie gibt nur an, wie schnell sich das Interferenzmuster ändert.

Die Gruppengeschwindigkeit gibt an, wie schnell Energie oder Information übertragen wird.

$$d) \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} (E_x \vec{e}_x + E_z \vec{e}_z) \times (H_y^* \vec{e}_y)$$

$$= \text{Re} \{ \vec{S} \} = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{K_1 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}_{\text{Re}} \vec{e}_z + \underbrace{j K_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos(\dots)}_{\text{Im}} \vec{e}_x \right]$$

Re  $\rightarrow$  Energie wird  
in z-Richtung  
transportiert

Im  $\rightarrow$  Nur Blindleistung  
in x-Richtung  
(stehende Welle)

$$\Rightarrow \text{Re} \{ \vec{S} \} = \frac{1}{2} K_1 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \vec{e}_z$$

Aufgabe 32

a) ges:  $\Phi_d, \Phi_r$

Ansatz: Stetigkeitsbedingungen für Tangentialkomponenten von  $\vec{H}$

$$H_{t1} = H_{t2} \quad \vec{r} = x \vec{e}_x, \quad x=0$$

$$H_{e,y} + H_{r,y} = H_{d,y}$$

$$H_e e^{-j k_1 \sin \Phi_e x} + H_r e^{-j k_1 \sin \Phi_r x} = H_d e^{-j k_2 \sin \Phi_d x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_e = \Phi_r}$$

$$k_1 \sin \Phi_e = k_2 \sin \Phi_d$$

$$\Rightarrow \Phi_d = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_2} \sin(\Phi_e)\right)$$



b)  $\vec{r}_0 = 0$   $\vec{E} = \Gamma \vec{H} \times \vec{e}_z = \Gamma H_y (\vec{e}_y \times (\underbrace{\cos \Phi \vec{e}_z + \sin \Phi \vec{e}_x}_{\substack{\text{hinlaufend + transmittiert} \\ \text{rücklaufend}}})$ )

$$\vec{E} = \Gamma H_y (\pm \cos \Phi \vec{e}_x - \sin \Phi \vec{e}_z)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{1/2}}}$$

c) Stetigkeitsbed.: (1)  $H_{e,y} + H_{r,y} = H_{d,y}$  (y-Komp.)

$$E_{e,x} + E_{r,x} = E_{d,x}$$

$$\rightarrow \Gamma_1 H_e \cos \Phi_e - \Gamma_1 H_r \cos \Phi_r = \Gamma_2 H_d \cos \Phi_d \quad (2)$$

$$\Rightarrow H_r = \frac{\Gamma_1 \cos \Phi_e - \Gamma_2 \cos \Phi_d}{\Gamma_1 \cos \Phi_e + \Gamma_2 \cos \Phi_d} H_e$$

$$H_d = \frac{2 \Gamma_1 \cos \Phi_e}{\Gamma_1 \cos \Phi_e + \Gamma_2 \cos \Phi_d} H_e$$

d) "Reflexionskoeffizient"  $r = \frac{S_r}{S_e} = \frac{H_r^2}{H_e^2} = \left( \frac{H_r}{H_e} \right)^2$

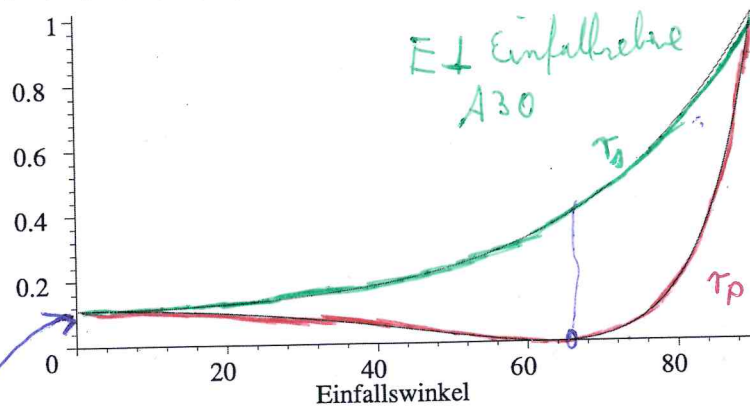
$$\epsilon_{r2} = 4 \quad \epsilon_{r1} = 1 \quad \Rightarrow \Gamma_1 = 2 \Gamma_2 \quad \left( \Gamma_{1/2} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{1/2}}} \right)$$

$$\Rightarrow r_p = \left( \frac{2 \cos \Phi_e - \cos \Phi_d}{2 \cos \Phi_e + \cos \Phi_d} \right)^2, \quad \text{mit } \Phi_d = \arcsin\left(\frac{1}{2} \sin \Phi_e\right)$$

$\frac{h_1}{h_2}$

lässt sich  $r(\Phi_e)$  plotten

$$A30: r_n = \left( \frac{\cos \Phi_e - 2 \cos \Phi_d}{\cos \Phi_e + 2 \cos \Phi_d} \right)^2$$

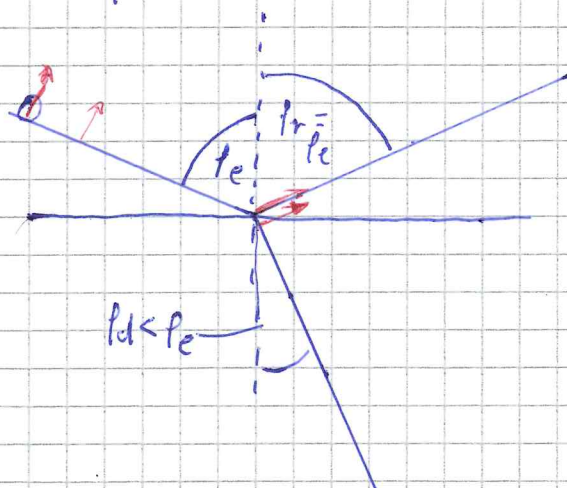


$\vec{E} \perp$  Einfallsebene A30  
 $\vec{E} \parallel$  Einfallsebene A32

bei senkrechtem Einfall kein Unterschied zw. senkrecht und parallel polarisiertem Licht

"Brewster-Winkel" großer Unterschied  $\approx 65^\circ$  hier wird nur Licht mit senkrechtem  $\vec{E}$  reflektiert

$\Rightarrow$  Bei schrägem Einfall auf optisch dünnere Medien wird unpolarisiertes Licht (d.h. es sind sowohl Anteile  $\perp$  als auch  $\parallel$  vorhanden) polarisiert. D.h. eine Komponente wird deutlich schwächer (bzw. gar nicht) reflektiert.



$\vec{E} \parallel \vec{e}_{\text{ref}}$   
 $\rightarrow$  keine Ausbreitung möglich