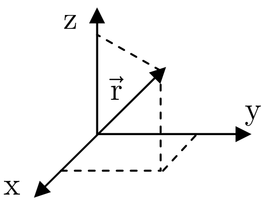
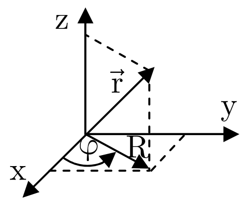
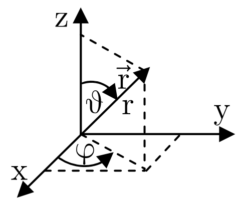
Formelsammlung
Felder und Wellen – WS11/12

1. Ortsvektoren

Kartesische Koordinaten		Zylinderkoordinaten		Kugelkoordinaten

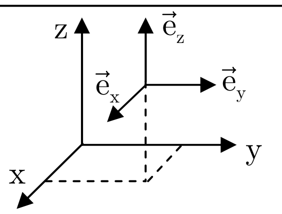


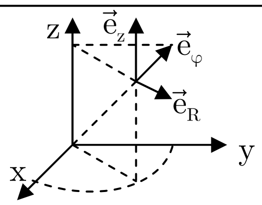


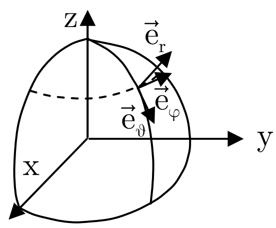


x	$=$	$R \cdot \cos\varphi$	$=$	$r \sin\vartheta \cos\varphi$
y	$=$	$R \cdot \sin\varphi$	$=$	$r \sin\vartheta \sin\varphi$
z	$=$	z	$=$	$r \cos\vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$=$	R	$=$	$r \sin\vartheta$
$\arctan\frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ
z	$=$	z	$=$	$r \cos\vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$=$	$\sqrt{R^2 + z^2}$	$=$	r
$\arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$	$=$	$\arctan\frac{R}{z}$	$=$	ϑ
$\arctan\frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ

2. Komponenten eines Vektorfeldes

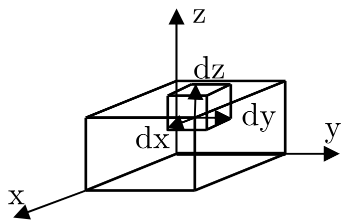
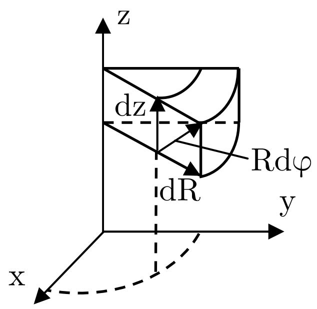
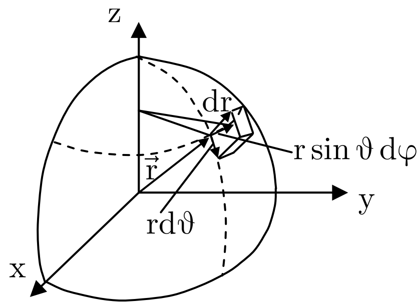






$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$	$=$	$A_R\vec{e}_R + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$	$=$	$A_r\vec{e}_r + A_\vartheta\vec{e}_\vartheta + A_\varphi\vec{e}_\varphi$
A_x	$=$	$A_R \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$	$=$	$A_r \sin\vartheta\cos\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta\cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$
A_y	$=$	$A_R \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$	$=$	$A_r \sin\vartheta\sin\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta\sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$
A_z	$=$	A_z	$=$	$A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
$A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi$	$=$	A_R	$=$	$A_r \sin\vartheta + A_\vartheta \cos\vartheta$
$-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$	$=$	A_φ	$=$	A_φ
A_z	$=$	A_z	$=$	$A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
$A_x \sin\vartheta\cos\varphi + A_y \sin\vartheta\sin\varphi + A_z \cos\vartheta$	$=$	$A_R \sin\vartheta + A_z \cos\vartheta$	$=$	A_r
$A_x \cos\vartheta\cos\varphi + A_y \cos\vartheta\sin\varphi - A_z \sin\vartheta$	$=$	$A_R \cos\vartheta - A_z \sin\vartheta$	$=$	A_ϑ
$-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$	$=$	A_φ	$=$	A_φ

3. Linien-, Flächen- und Volumenelemente

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
		
$d\vec{s} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$	$= \vec{e}_R \cdot dR + \vec{e}_\varphi \cdot R d\varphi + \vec{e}_z \cdot dz$	$= \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\vartheta \cdot r\, d\vartheta + \vec{e}_\varphi \cdot r \sin\vartheta\, d\varphi$
$d\vec{f} = \vec{e}_x \cdot dy\, dz + \vec{e}_y \cdot dx\, dz + \vec{e}_z \cdot dx\, dy$	$= \vec{e}_R \cdot R \cdot d\varphi\, dz + \vec{e}_\varphi \cdot dR\, dz + \vec{e}_z \cdot R \cdot dR\, d\varphi$	$= \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi + \vec{e}_\vartheta \cdot r \cdot \sin\vartheta\, dr\, d\varphi + \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot dr\, d\vartheta$
$dv = dx\, dy\, dz$	$= R\, dR\, d\varphi\, dz$	$= r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot dr\, d\vartheta\, d\varphi$

4. Differentialoperatoren

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$\operatorname{grad} \psi = \vec{e}_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$= \vec{e}_R \frac{\partial\psi}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$= \vec{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$
$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\, A_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\vartheta\, \sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$	$= \vec{e}_R \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right) + \vec{e}_z \left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\, A_\varphi) - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}\right)$	$= \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\varphi\, \sin\vartheta\right) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right] + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\, A_\varphi\right)\right] + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]$
$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\, \frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\, \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\, \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$

5. Maxwellgleichungen in allgemeingültiger Form

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$$

$$\oint \vec{D}\, d\vec{f} = \int \rho\, dv \qquad \oint \vec{H}\, d\vec{s} = \int \left(\vec{J} + \dot{\vec{D}}\right) d\vec{f}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{f} \qquad \oint \vec{B}\, d\vec{f} = 0$$

6. Materialgleichungen

allgemein:	$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$
für lineare, isotrope	$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$
Medien:	$\vec{P} = \chi_{el}\varepsilon_0\vec{E}$	$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$
	mit $\chi_{el} = \varepsilon_r - 1$	mit $\chi_m = \mu_r - 1$

7. Kräfte und Momente

	$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$	$\vec{F} = Q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$
	Kraft zwischen zwei Ladungen	$= \ell \cdot A \cdot \left(\vec{J} \times \vec{B}\right)$
	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\vec{e}_r$	$= I\left(\vec{\ell} \times \vec{B}\right)$
Dipolmoment:	$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$	$\vec{m} = N \cdot A \cdot I \cdot \vec{n}$
Drehmoment:	$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$

8. Grenzflächen

$\sigma = D_{n2} - D_{n1}$	$J_f = H_{t2} - H_{t1}$, $J_f \perp (H_{t2} - H_{t1})$
$E_{t2} = E_{t1}$	$B_{n2} = B_{n1}$

9. Feldenergiedichte

allgemein:	$w_e = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$	$w_m = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$
für lineare, isotrope Medien:	$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}^2$	$w_m = \frac{1}{2}\mu\vec{H}^2$
Gesamtenergie	$W_e = \int w_e\, dv$	$W_m = \int w_m\, dv$

10. Skalarpotential

Elektrostatik: $\Phi_{el}(\vec{r}_2) - \Phi_{el}(\vec{r}_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{s} \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi_{el}$

Magnetostatik: $\Phi_{MP}(\vec{r}_2) - \Phi_{MP}(\vec{r}_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{H}\, d\vec{s} \qquad \vec{H} = -\operatorname{grad} \Phi_{MP}$

Coulombintegral: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dv'$

Poissonintegral: $\Delta\Phi_{el} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Laplacegleichung: $\Delta\Phi_{el} = 0 \quad (\text{für} \quad \rho = 0)$

Partikulärlösung in kartesischen Koordinaten:

(für $\alpha \neq 0$)

$$\Phi_{\alpha\beta} = [a_1 \sin(\alpha x) + a_2 \cos(\alpha x)] \cdot [a_3 \sin(\beta y) + a_4 \cos(\beta y)]$$
$$\cdot [a_5 \cdot e^{\gamma z} + a_6 \cdot e^{-\gamma z}] \qquad \text{mit} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Partikulärlösung in Zylinderkoordinaten:

(für $\gamma \neq 0$)

$$\Phi_{\gamma m} = [a_1 J_m(\gamma R) + a_2 N_m(\gamma R)] \cdot [a_3 \sin(m\varphi) + a_4 \cos(m\varphi)]$$
$$\cdot [a_5 \sinh(\gamma z) + a_6 \cosh(\gamma z)]$$

mit J_m: Besselfunktion 1. Art

N_m: Besselfunktion 2. Art (Neumann)

Partikulärlösung in Kugelkoordinaten:

(für $\ell \neq -\frac{1}{2}$)

$$\Phi_{\ell m} = [a_1 r^{\ell} + a_2 r^{-(\ell+1)}] \cdot [a_3 \cdot P_{\ell}^{m}(\cos\vartheta) + a_4 \cdot Q_{\ell}^{m}(\cos\vartheta)]$$
$$\cdot [a_5 \sin(m\varphi) + a_6 \cos(m\varphi)]$$

mit P_ℓ^m: zugeordnete Legendrepolynome 1. Art

Q_ℓ^m: zugeordnete Legendrepolynome 2. Art

11. Vektorpotential

Vektorpotential: $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

"Poissongleichung": $\Delta A_x = -\mu \cdot J_x \qquad \Delta A_y = -\mu \cdot J_y \qquad \Delta A_z = -\mu \cdot J_z$

"Coulombintegral":
(Das Volumen v' muss
alle Ströme beinhalten)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dv'$$

Gesetz v. Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, dv'$

für Linienleiter: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

12. Das stationäre Strömungsfeld

Stromdichte: $\vec{J} = \kappa\, \vec{E}$

elektrischer Widerstand $R = \frac{U}{I} = \frac{-\int \vec{E}\, d\vec{s}}{\int \vec{J}\, d\vec{f}}$

Verlustleistungsdichte: $\frac{dw_j}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{E}$

13. Kapazität

allgemein:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n \end{pmatrix}$$

speziell: für $n = 2$ <u>und</u> $Q_1 = -Q_2 = Q$: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \vec{D}\, d\vec{f}}{-\int \vec{E}\, d\vec{s}}$

Energie allgemein:

$$W_{el} = \frac{1}{2}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n \end{pmatrix}$$

Energie speziell: für $n = 2$ <u>und</u> $Q_1 = -Q_2 = Q$: $W_{el} = \frac{1}{2}\, C \cdot U^2$

14. Induktivität

Energie:

$$W_m = \frac{1}{2}(I_1, \ldots, I_n) \cdot \begin{pmatrix} L_{11} & \cdot & \cdot & L_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n1} & \cdot & \cdot & L_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$$

für $n = 1$: $W_m = \frac{1}{2}\, L \cdot I^2$

für $n = 2$: $W_m = \frac{1}{2}\, L_{11} \cdot I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2}\, L_{22} \cdot I_2^2$

Gegeninduktivität: $L_{ik} = \frac{N_k \cdot \Phi_{m,ik}}{I_i} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{c_i} \oint_{c_k} \frac{d\vec{s}_i\, d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$ (für dünne Leiter)

äußere Selbstinduktivität: $L^{(a)} = \frac{N \cdot \Phi^{(a)}}{I}$

Magnetischer Fluss: $\Phi_{m,ik} = \iint_{(A_k)} \vec{B}_i\, d\vec{A}$

Induktionsspannung: $U_{ind,ik} = -N_k \frac{d\Phi_{m,ik}}{dt}$

15. Maxwellgleichungen für harmonische Vorgänge

$\text{div}\ \vec{D} = \rho$

$\text{rot}\ \vec{H} = \vec{J} + j\ \omega\ \vec{D}$

$\text{rot}\ \vec{E} = -\ j\ \omega\ \vec{B}$

$\text{div}\ \vec{B} = 0$

16. Schnell veränderliche Felder

	nicht leitende Materialien	leitende Materialien
Allgemein:	$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$	$\Delta\vec{E} - \kappa\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$
Harmonische Vorgänge:	$\Delta\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} = 0$	$\Delta\vec{E} - j\omega\kappa\mu\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} = 0$

für $\vec{H}$ entsprechend

Wellenzahl: $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$

Lichtgeschwindigkeit: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Komplexer Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$

Zeitlicher Mittelwert der Energiestromdichte: $\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\ \text{Re}\ \left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\}$

17. Verwendete Formelzeichen

$d\vec{s}$, $d\vec{f}$, dv	Weg-, Flächen- und Volumenelemente
$\vec{E}$, $\vec{D}$	elektrische Feldstärke, Verschiebungsdichte
$\vec{H}$, $\vec{B}$	magnetische Feldstärke, Flußdichte
$\vec{J}$, J_f	Stromdichte, Flächenstromdichte
$\vec{P}$, $\vec{p}$	Polarisation, elektrisches Dipolmoment
$\vec{M}$, $\vec{m}$	Magnetisierung, magnetisches Dipolmoment
ε_0, ε_r	Dielektrizitätskonstante, -zahl
μ_0, μ_r	Permeabilitätskonstante, -zahl
χ_{el}, χ_m	elektrische, magnetische Suszeptibilität
Q	Ladung
ℓ	Länge
A	Fläche
N	Windungszahl
U, I	Spannung, Strom
R	Widerstand
C, L	Kapazität, Induktivität
c_{ik}, L_{ik}	Influenzkoeffizienten, Induktionskoeffizienten
$\vec{n}$	Normalenvektor
$\vec{T}$	Drehmoment
σ	Flächenladungsdichte
w, W	Energiedichte, Energie
Φ_{el}	elektrisches Potential
$\vec{r}$, $\vec{d}$	Richtungs-, Abstandsvektor
$\vec{A}$	magnetisches Vektorpotential
κ	elektrische Leitfähigkeit
Φ_i, $\Phi^{(a)}$, Φ_m	innerer, äußerer magnetischer Fluß
ω	Kreisfrequenz
k	Wellenzahl
c, λ	Lichtgeschwindigkeit, Wellenlänge
$\vec{S}$	komplexer Poyntingvektor
$\vec{S}_{av}$	Zeitlicher Mittelwert der Energiestromdichte