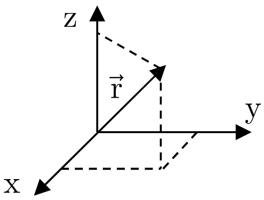
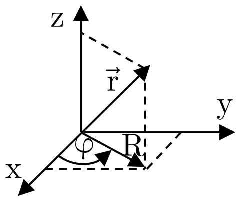
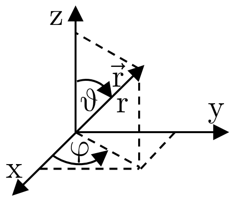
Formelsammlung
Felder und Wellen – WS14/15

1. Ortsvektoren

Kartesische Koordinaten		Zylinderkoordinaten		Kugelkoordinaten

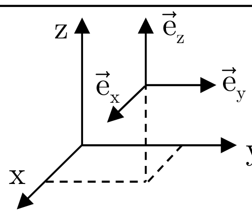


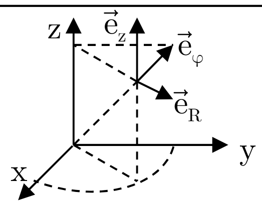


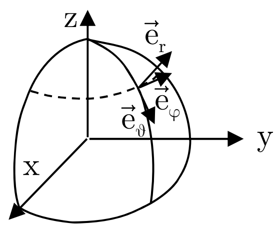


x	$=$	$R \cdot \cos\varphi$	$=$	$r \sin\vartheta \cos\varphi$
y	$=$	$R \cdot \sin\varphi$	$=$	$r \sin\vartheta \sin\varphi$
z	$=$	z	$=$	$r \cos\vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$=$	R	$=$	$r \sin\vartheta$
$\arctan\frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ
z	$=$	z	$=$	$r \cos\vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$=$	$\sqrt{R^2 + z^2}$	$=$	r
$\arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$	$=$	$\arctan\frac{R}{z}$	$=$	ϑ
$\arctan\frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ

2. Komponenten eines Vektorfeldes



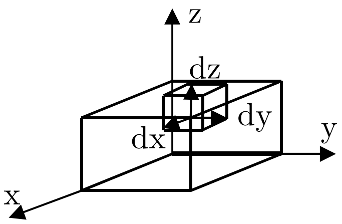




$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$	$=$	$A_R\vec{e}_R + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$	$=$	$A_r\vec{e}_r + A_\vartheta\vec{e}_\vartheta + A_\varphi\vec{e}_\varphi$
A_x	$=$	$A_R \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$	$=$	$A_r \sin\vartheta\cos\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta\cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$
A_y	$=$	$A_R \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$	$=$	$A_r \sin\vartheta\sin\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta\sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$
A_z	$=$	A_z	$=$	$A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
$A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi$	$=$	A_R	$=$	$A_r \sin\vartheta + A_\vartheta \cos\vartheta$
$-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$	$=$	A_φ	$=$	A_φ
A_z	$=$	A_z	$=$	$A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
$A_x \sin\vartheta\cos\varphi + A_y \sin\vartheta\sin\varphi + A_z \cos\vartheta$	$=$	$A_R \sin\vartheta + A_z \cos\vartheta$	$=$	A_r
$A_x \cos\vartheta\cos\varphi + A_y \cos\vartheta\sin\varphi - A_z \sin\vartheta$	$=$	$A_R \cos\vartheta - A_z \sin\vartheta$	$=$	A_ϑ
$-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$	$=$	A_φ	$=$	A_φ

3. Linien-, Flächen- und Volumenelemente

Kartesische Koordinaten

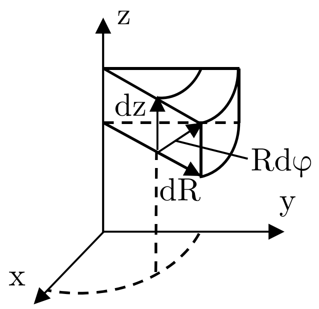


$$d\vec{s} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$$

$$d\vec{f} = \vec{e}_x \cdot dy\ dz + \vec{e}_y \cdot dx\ dz + \vec{e}_z \cdot dx\ dy$$

$$dv = dx\ dy\ dz$$

Zylinderkoordinaten

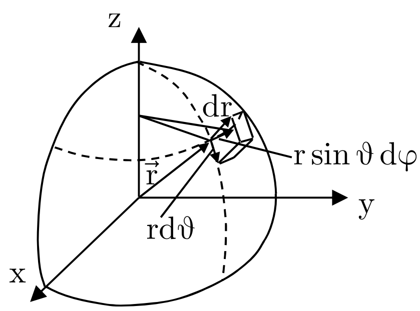


$$= \vec{e}_R \cdot dR + \vec{e}_\varphi \cdot R d\varphi + \vec{e}_z \cdot dz$$

$$= \vec{e}_R \cdot R \cdot d\varphi\ dz + \vec{e}_\varphi \cdot dR\ dz + \vec{e}_z \cdot R \cdot dR\ d\varphi$$

$$= R\ dR\ d\varphi\ dz$$

Kugelkoordinaten



$$= \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\vartheta \cdot r\ d\vartheta + \vec{e}_\varphi \cdot r\ \sin\vartheta\ d\varphi$$

$$= \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi + \vec{e}_\vartheta \cdot r \cdot \sin\vartheta\ dr\ d\varphi + \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot dr\ d\vartheta$$

$$= r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot dr\ d\vartheta\ d\varphi$$

4. Differentialoperatoren

Kartesische Koordinaten

$$\operatorname{grad} \psi = \vec{e}_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Zylinderkoordinaten

$$= \vec{e}_R \frac{\partial\psi}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\ A_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \vec{e}_R \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right) + \vec{e}_z \left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\ A_\varphi) - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\ \frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Kugelkoordinaten

$$= \vec{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\ \sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\ A_r\right) + \frac{1}{r\ \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta\ \sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\ \sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r\ \sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\varphi\ \sin\vartheta\right) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right] + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\ A_\varphi\right)\right] + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ A_\vartheta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\ \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\ \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

5. Maxwellgleichungen in allgemeingültiger Form

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad \oint \vec{D} \bullet d\vec{f} = \int \rho \, dv$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \oint \vec{H} \, d\vec{s} = \int \vec{J} \bullet d\vec{f} + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{f}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

6. Materialgleichungen

allgemein:	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$
für lineare, isotrope	$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$
Medien:	$\vec{P} = \chi_{el} \varepsilon_0 \vec{E}$	$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$
	mit $\chi_{el} = \varepsilon_r - 1$	mit $\chi_m = \mu_r - 1$

7. Kräfte und Momente

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

Kraft zwischen
zwei Ladungen

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = Q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) = \ell \cdot A \cdot \left(\vec{J} \times \vec{B} \right) = I \left(\vec{\ell} \times \vec{B} \right)$$

8. Grenzflächen

$$\sigma = D_{n2} - D_{n1}$$
$$E_{t2} = E_{t2}$$

$$0 = H_{t2} - H_{t1}$$
$B_{n2} = B_{n1}$ ohne Flächenströme

9. Feldenergiedichte

allgemein:	$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$	$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$
für lineare, isotrope Medien:	$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon \vec{E}^2$	$w_m = \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2$
Gesamtenergie	$W_e = \int w_e \, dv = \frac{1}{2} \int \Phi \rho \, dv$	$W_m = \int w_m \, dv$

10. Skalarpotential

Elektrostatik: $\Phi_{el}(\vec{r}_2) - \Phi_{el}(\vec{r}_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{s}$ $\qquad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi_{el}$

Coulomb int egral : $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dv'$

Poissongleichung : $\Delta\Phi_{el} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Laplacegleichung : $\Delta\Phi_{el} = 0 \quad (\text{für} \quad \rho = 0)$

Partikulärlösung in kartesischen Koordinaten:

(für $\alpha \neq 0$) $\qquad \Phi_{\alpha\beta} = \left[a_1 \sin(\alpha x) + a_2 \cos(\alpha x)\right] \cdot \left[a_3 \sin(\beta y) + a_4 \cos(\beta y)\right]$

$$\cdot \left[a_5 \cdot e^{\gamma z} + a_6 \cdot e^{-\gamma z}\right] \qquad \text{mit} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

11. Vektorpotential

Vektorpotential: $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

"Poissongleichung" : $\Delta A_x = -\mu \cdot J_x \qquad \Delta A_y = -\mu \cdot J_y \qquad \Delta A_z = -\mu \cdot J_z$

"Coulomb int egral" :
(Das Volumen v' muss
alle Ströme beinhalten) $\qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dv'$

Gesetz v. Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, dv'$

für Linienleiter: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

12. Das stationäre Strömungsfeld

Stromdichte: $\vec{J} = \kappa\, \vec{E}$

elektrischer Widerstand $\qquad R = \frac{U}{I} = \frac{-\int \vec{E}\, d\vec{s}}{\int \vec{J}\, d\vec{f}}$

Verlustleistungsdichte: $\frac{dw_j}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{E}$

13. Kapazität

allgemein: $$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{c_{ik}}_{\text{Influenzkoeffizient}} \Phi_k$$

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{p_{ik}}_{\text{Potentialkoeffizient}} Q_k$$

speziell: für $n = 2$ und $Q_1 = -Q_2 = Q$: $$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \vec{D}\, d\vec{f}}{-\int \vec{E}\, d\vec{s}}$$

Energie allgemein: $$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} p_{ik}\, Q_i\, Q_k$$

Energie speziell: für $n = 2$ und $Q_1 = -Q_2 = Q$: $$W_{el} = \frac{1}{2}\, C \cdot U^2$$

14. Induktivität

Energie: $$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} L_{ik}\, I_i\, I_k$$

für $n = 1$: $$W_m = \frac{1}{2}\, L \cdot I^2$$

für $n = 2$: $$W_m = \frac{1}{2}\, L_{11} \cdot I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2}\, L_{22} \cdot I_2^2$$

Gegeninduktivität: $$L_{ik} = \frac{N_k \cdot \Phi_{m,ik}}{I_i}$$

äußere Selbstinduktivität: $$L^{(a)} = \frac{N \cdot \Phi_m^{(a)}}{I}$$

Magnetischer Fluss: $$\Phi_{m,ik} = \iint_{F_k} \overrightarrow{B_i}\, d\vec{f}_k$$

Induktionsspannung: $$U_{ind,ik} = -N_k \frac{d\Phi_{m,ik}}{dt}$$

15. Maxwellgleichungen für harmonische Vorgänge

$$\mathrm{div}\ \vec{D} = \rho \qquad \mathrm{rot}\ \vec{H} = \vec{J} + j\,\omega\,\vec{D}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\ j\,\omega\,\vec{B} \qquad \mathrm{div}\ \vec{B} = 0$$

16. Schnell veränderliche Felder

	nicht leitende Materialien	leitende Materialien
Allgemein:	$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$	$\Delta\vec{E} - \kappa\mu \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$
Harmonische Vorgänge	$\Delta\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} = 0$	$\Delta\vec{E} - j\omega\kappa\mu\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} = 0$

ebene Wellen:

$$\vec{E} = E_0 \; e^{j(\omega t \; \pm kx)} \; \vec{e}_y$$

$$\vec{H} = H_o \; e^{j(\omega t \; \pm kx)} \; \vec{e}_z$$

$$H_0 = \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \; E_0$$

Wellenzahl:

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Komplexer Poyntingvektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$$

Zeitlicher Mittelwert

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \; \mathrm{Re} \left\{\vec{E} \; \times \; \vec{H}^*\right\}$$

17. Verwendete Formelzeichen

$d\vec{s}$, $d\vec{f}$, dv	Weg-, Flächen- und Volumenelemente
$\vec{E}$, $\vec{D}$	elektrische Feldstärke, Verschiebungsdichte
$\vec{H}$, $\vec{B}$	magnetische Feldstärke, Flußdichte
$\vec{J}$, J_f	Stromdichte, Flächenstromdichte
$\vec{P}$	Polarisation
$\vec{M}$	Magnetisierung
ε_0, ε_r	Dielektrizitätskonstante, -zahl
μ_0, μ_r	Permeabilitätskonstante, -zahl
χ_{el}, χ_m	elektrische, magnetische Suszeptibilität
Q	Ladung
ℓ	Länge
A	Fläche
N	Windungszahl
U, I	Spannung, Strom
R	Widerstand
C, L	Kapazität, Induktivität
c_{ik}, p_{ik}	Influenzkoeffizienten, Potentialkoeffizienten
L_{ik}	Induktionskoeffizienten,
$\vec{n}$	Normalenvektor
σ	Flächenladungsdichte
w, W	Energiedichte, Energie
Φ_{el}	elektrisches Potential
$\vec{r}$, $\vec{d}$	Richtungs-, Abstandsvektor
$\vec{A}$	magnetisches Vektorpotential
κ	elektrische Leitfähigkeit
Φ_m	magnetischer Fluß
ω	Kreisfrequenz
k	Wellenzahl
c, λ	Lichtgeschwindigkeit, Wellenlänge
$\vec{S}$	komplexer Poyntingvektor
$\vec{S}_{av}$	Zeitlicher Mittelwert der Energiestromdichte