Aufgabe 1 (16 Punkte)

Eine auf dem Koordinatenursprung zentrierte, nichtleitende Kugel mit der Ladungsdichte $\rho = \frac{\rho_0 \cdot k}{r^2}$ und dem Radius a wird von einer Kugelschale aus einem unendlich gut leitenden Metall mit der Flächenladungsdichte $\sigma = \sigma_1$ und Radius b umschlossen, siehe Abbildung.
Im gesamten Bereich der Anordnung gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$.

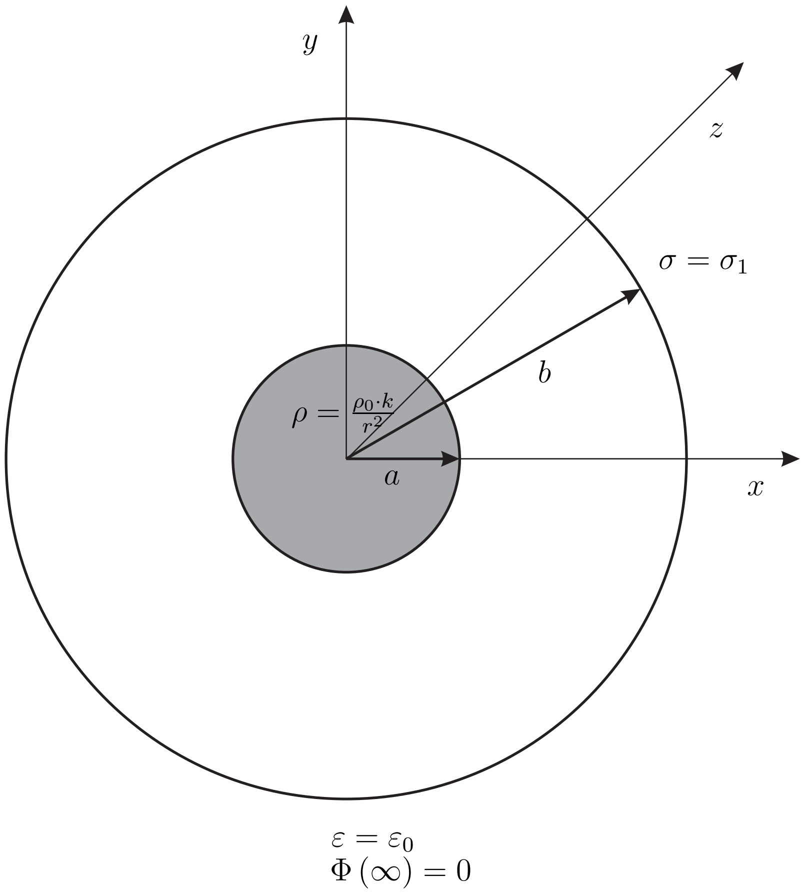


Abbildung 1: Kugelsymmetrische Versuchsanordnung

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ im gesamten Raum $0 \leq r < \infty$.

b) Berechnen Sie das elektrische Potential Φ im gesamten Raum $0 \leq r < \infty$ unter der Bedingung $\Phi(\infty) = 0$.

c) Berechnen Sie die Energie W die notwendig ist, um eine Punktladung Q_1 von einem Punkt auf der x-Achse $(x, y, z)^T = (c, 0, 0)^T$ auf einen Punkt auf der y-Achse $(x, y, z)^T = \left(0, \frac{c}{2}, 0\right)^T$ zu verschieben, mit $\frac{c}{2} > b$.

   Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass nur die potentielle Energie $W_{pot} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{s}$ in das System gesteckt, aber keine Reibung oder ähnliches überwunden werden muss.
   Sollten Sie die Aufgabenteile a) und/oder b) nicht gelöst haben, gehen Sie anstatt der Ladungsverteilung dieser Aufgabe von einer punktförmigen Ladung Q_U im Ursprung aus.

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Kugelförmige Anordnung $\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{e}_r$

$$\iint \vec{D} d\vec{f} = \iiint \rho dV \tag{1}$$

$$\iint \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{f} = \iiint \rho dV \tag{2}$$

$0 \leq r < a$:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon_0 r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \rho_0 k \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi \tag{3}$$

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r = 4\pi k \rho_0 r \tag{4}$$

$$\Rightarrow E_r = \underbrace{\frac{k\rho_0}{\varepsilon_0}}_{k_1} \cdot \frac{1}{r} \tag{5}$$

$a \leq r < b$:
Gesamtladung innere Kugel: $Q_{innen} = 4\pi k \rho_0 a$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon_0 r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = Q_{innen} \tag{6}$$

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r = 4\pi k \rho_0 a \tag{7}$$

$$\Rightarrow E_r = \underbrace{\frac{ka\rho_0}{\varepsilon_0}}_{k_2} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{8}$$

$b \leq r$:
Gesamtladung äußere Kugelschale: $Q_{aussen} = \sigma_1 A_b = \sigma_1 4\pi b^2$
Gesamtladung gesamte Anordnung: $Q_{ges} = Q_{innen} + Q_{aussen} = 4\pi \left(ka\rho_0 + \sigma_1 b^2\right)$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon_0 r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = Q_{ges} \tag{9}$$

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r = 4\pi k \rho_0 a \tag{10}$$

$$\Rightarrow E_r = \underbrace{\frac{ka\rho_0 + \sigma_1 b^2}{\varepsilon_0}}_{k_3} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{11}$$

b)

$$\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{s} \tag{12}$$

$$\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} E_r dr \tag{13}$$

$b \leq r$:

$$\Phi(r) - \underbrace{\Phi(\infty)}_{=0} = \int\limits_r^\infty E_{r'} dr' \tag{14}$$

$$\Phi(r) = k_3 \int\limits_r^\infty \frac{1}{r'^2} dr' = k_3 \left[-\frac{1}{r'}\right]_r^\infty \tag{15}$$

$$= \frac{k_3}{r} \tag{16}$$

$$= \frac{k\rho_0 a + \sigma_1 b^2}{\varepsilon} \frac{1}{r} \tag{17}$$

$a \leq r < b$:
Potential an der Stelle $r = b$ (aus Stetigkeitsgründen): $\Phi(b) = \frac{k_3}{b} = \frac{k\rho_0 a + \sigma_1 b^2}{\varepsilon} \frac{1}{b}$

$$\Phi(r) - \Phi(b) = \int\limits_r^b E_{r'} dr' \tag{18}$$

$$\Phi(r) = k_2 \int\limits_r^b \frac{1}{r'^2} dr' + \Phi(b) = k_2 \left[-\frac{1}{r'}\right]_r^b + \Phi(b) \tag{19}$$

$$= k_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) + \frac{k_3}{b} \tag{20}$$

$$= \frac{k\rho_0 a}{\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma_1 b}{\varepsilon_0} \tag{21}$$

$0 \leq r < a$:
Potential an der Stelle $r = a$ (aus Stetigkeitsgründen): $\Phi(a) = \frac{k\rho_0}{\varepsilon} + \frac{\sigma_1 b}{\varepsilon}$

$$\Phi(r) - \Phi(a) = \int\limits_r^a E_{r'} dr' \tag{22}$$

$$\Phi(r) = k_1 \int\limits_r^a \frac{1}{r'} dr' + \Phi(a) = k_1 [\ln r]_r^a + \Phi(a) \tag{23}$$

$$= k_1 (\ln a - \ln r) + \frac{k\rho_0}{\varepsilon} + \frac{\sigma_1 b}{\varepsilon} \tag{24}$$

c)

$$W = -\int\limits_{\vec{r}_1=c}^{\vec{r}_2=c/2} \vec{F} d\vec{s} \tag{25}$$

$$= -\int\limits_{\vec{r}_1=c}^{\vec{r}_2=c/2} Q_1 \vec{E} d\vec{s} \tag{26}$$

$$= Q_1 \cdot \left(-\int\limits_{\vec{r}_1=c}^{\vec{r}_2=c/2} \vec{E} d\vec{s} \right) \tag{27}$$

$$= Q_1 \cdot \left(\Phi\left(\frac{c}{2}\right) - \Phi\left(c\right) \right) \tag{28}$$

$$= Q_1 \cdot \frac{k\rho_0 a + \sigma_1 b^2}{\varepsilon} \left(\frac{2}{c} - \frac{1}{c} \right) \tag{29}$$

$$= Q_1 \cdot \frac{k\rho_0 a + \sigma_1 b^2}{\varepsilon c} \tag{30}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

In einem Plattenkondensator mit Plattenabstand $3a$ und Seitenfläche A befindet sich zentriert eine Metallplatte der Dicke a, die ebenfalls die Seitenfläche A aufweist. In dieser Platte gilt $\kappa = \infty$.

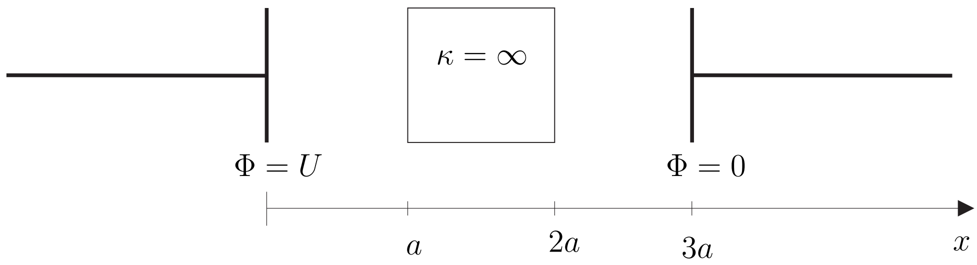


Abbildung 2: Plattenkondensator mit eingeschobener Metallplatte

Über dem Kondensator liegt die Spannung U an. Randeffekte können vernachlässigt werden.

a) Berechnen Sie das E-Feld im Inneren des Kondensators sowie die Kapazität C des Kondensators. In den Bereichen $0 < x < a$ und $2a < x < 3a$ befinde sich Vakuum ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\kappa = 0$).

Nun werden zwei leitfähige, dielektrische Materialien in den Kondensator eingeschoben, so dass diese die bisher mit Vakuum gefüllten Bereiche vollständig ausfüllen. Nun fließt ein Strom durch die Anordnung:

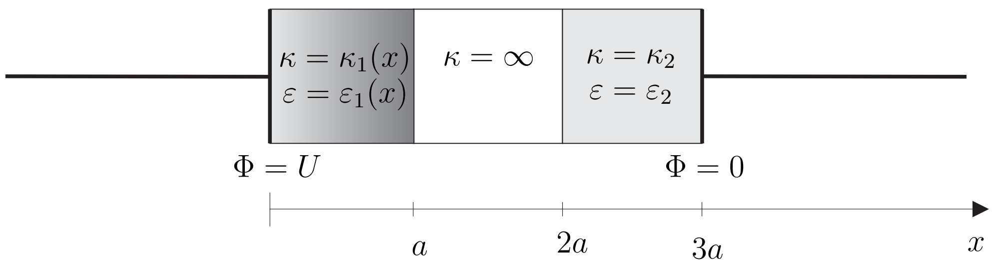


Abbildung 3: Plattenkondensator mit Metallplatte und Dielektrika

Die Leitfähigkeiten und Dielektrizitätszahlen lauten für $0 \leq x \leq a$:

$$\kappa_1(x) = \kappa_0(1 + \frac{x^2}{a^2}) \qquad \varepsilon_1(x) = \varepsilon_0(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{a^2})$$

Und für $2a \leq x \leq 3a$:

$$\kappa_2 = \frac{4}{\pi}\kappa_0 \qquad \varepsilon(x) = \varepsilon_2$$

b) Nach kurzer Zeit habe sich der stationäre Zustand eingestellt. Was gilt in diesem Zustand für die Zeitabhängigkeit der Stromdichten? Geben Sie $\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$ an.

c) Was folgt daraus für die Zeitabhängigkeit von $\vec{E}$, $\vec{D}$, und ρ? Begründen Sie! Was kann somit über die Ortsabhängigkeit $\frac{\partial}{\partial x}\vec{j}$ ausgesagt werden?

d) Berechnen Sie den ohmschen Widerstand R der Anordnung! Hinweis:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

e) Berechnen Sie alle auftretenden Flächen- und Raumladungen σ und ρ in Abhängigkeit von der Stromdichte j!

Lösung 2 (16 Punkte)

a) Im Metall gilt $\vec{E}=0$, im Vakuum ist $\vec{E}$ konstant: $\vec{E}=E_0\vec{e_x}$.

$$-\int_0^{3a} E(x)dx = -U \tag{31}$$

$$U = \int_0^{a} E_0 dx + \int_{2a}^{3a} E_0 dx = 2aE_0 \tag{32}$$

$$E_0 = \frac{U}{2a} \tag{33}$$

$$W_{el} = \frac{1}{2}CU^2 \Rightarrow C = \frac{2W_{el}}{U^2} \tag{34}$$

$$W_{el} = \iiint_V \frac{1}{2} w_{el} dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 2aA = \varepsilon_0 \frac{U^2}{4a} A \tag{35}$$

$$\Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{A}{2a} \tag{36}$$

b) Im stationären Zustand ändern sich die Stromdichten nicht:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{j} = \vec{0} \tag{37}$$

c) Mit $\frac{\partial}{\partial t}\vec{j} = \vec{0}$ gilt:

Wegen $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\kappa}$ folgt $\vec{E} = konst.$, wegen $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ folgt $\vec{D} = konst.$ und aus $\operatorname{div} D = \rho$ folgt $\rho = konst.$

Wegen der Ladungserhaltung muss deswegen $\frac{\partial}{\partial x}\vec{j} = \vec{0}$ sein.

d)

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{jA} \tag{38}$$

Für die Spannung U gilt:

$$U = \int_0^{3a} E(x)dx \tag{39}$$

$$= \int_0^{a} \frac{j}{\kappa_0(1+\frac{x^2}{a^2})}dx + 0 + \int_{3a}^{2a} \frac{j}{\kappa_2}dx \tag{40}$$

$$= \frac{j}{\kappa_0}\left[a\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a + \frac{j}{\kappa_2}a \tag{41}$$

$$= \frac{j}{\kappa_0}a\arctan 1 + \frac{j}{\kappa_2}a \tag{42}$$

$$= \frac{j}{\kappa_0}a\frac{\pi}{4} + \frac{j}{\kappa_0}a\frac{\pi}{4} \tag{43}$$

$$= \frac{j}{\kappa_0}a\frac{\pi}{2} \tag{44}$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich der Widerstand zu

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{jA} = \frac{a\pi}{2A\kappa_0} \tag{45}$$

e) Mit

$$j = \frac{\kappa_0 U}{a\frac{\pi}{2}} \tag{46}$$

ergibt sich:

$$\sigma(x=0) = D_+(x=0) \tag{47}$$

$$= \varepsilon(0)E(0) \tag{48}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{j}{\kappa_1(0)} \tag{49}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{U}{a\frac{\pi}{2}} \tag{50}$$

$$= \frac{U\varepsilon_0}{a\pi} \tag{51}$$

$$\sigma(x=a) = -D_-(x=a) \tag{52}$$

$$= -\varepsilon(a)E(a) \tag{53}$$

$$= -\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{j}{\kappa_1(a)} \tag{54}$$

$$= -\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{U}{2a\frac{\pi}{2}} \tag{55}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{U\varepsilon_0}{a\pi} \tag{56}$$

$$\sigma(x=2a) = D_+(x=2a) \tag{57}$$
$$= \varepsilon_2 \frac{j}{\kappa_2} \tag{58}$$
$$= \varepsilon_2 \frac{\frac{\kappa_0 U}{a\frac{\pi}{2}}}{\kappa_0 \frac{4}{\pi}} \tag{59}$$
$$= \varepsilon_2 \frac{U}{2a} \tag{60}$$

$$\sigma(x=3a) = D_-(x=3a) \tag{61}$$
$$= -\sigma(x=2a) = -\varepsilon_2 \frac{U}{2a} \tag{62}$$

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D} \tag{63}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \vec{D} \tag{64}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon(x) E(x)\right) \tag{65}$$

Für $0 \leq x \leq a$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{j}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) = j\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{1}{2}a^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right) \tag{66}$$
$$= j\varepsilon_0 \frac{2x(a^2 + x^2) - (\frac{1}{2}a^2 + x^2)2x}{(a^2 + x^2)^2} \tag{67}$$
$$= j\varepsilon_0 \frac{xa^2}{(a^2 + x^2)^2} \tag{68}$$

Für $a \leq x \leq 2a$ gilt $\rho = 0$ wegen $\vec{E} = 0$.

Für $2a \leq x \leq 3a$ gilt $\rho = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_2 \frac{j}{\kappa_2}\right) = 0$.

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Eine lange Spule mit Länge l, Radius r_a und n Windungen wird vom Strom $I_a = I_0 \sin(\omega_0 t)$ durchflossen. Es gilt die Näherung für lange Spulen.

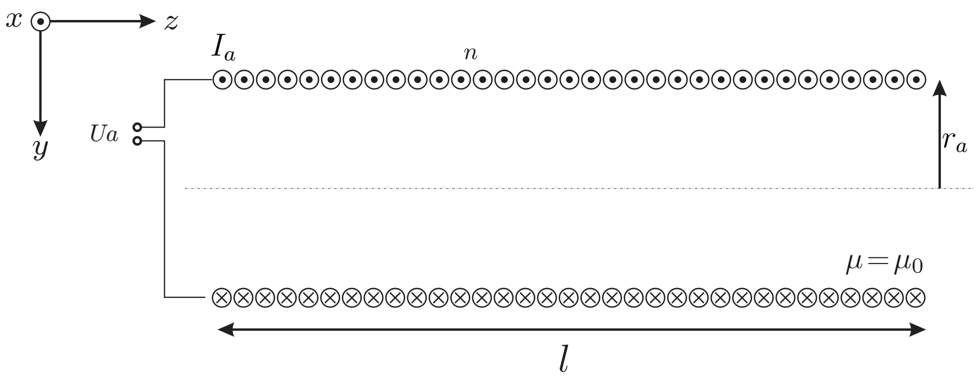


Abbildung 4: Längsansicht der langen Spule

a) Berechnen Sie den Vektor der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$.

   Zeichnen Sie $\vec{B}$ qualitativ in Abb. 4 ein.

b) Berechnen Sie die Energiedichte und die Energie des Feldes der Spule. Das Feld außerhalb der Spule soll dabei vernachlässigt werden.

Jetzt wird eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius r_{LS} und dem Widerstand R_{LS} in die Spule eingebracht. Die Leiter schleife bewegt sich nicht und befindet sich zentral innerhalb der Spule, wie in der Querschnittszeichnung Abb. 5 dargestellt.

Es wird angenommen, dass ein Strom in der Leiterschleife keine Auswirkungen auf das Magnetfeld und den Strom der umgebenden Spule hat.

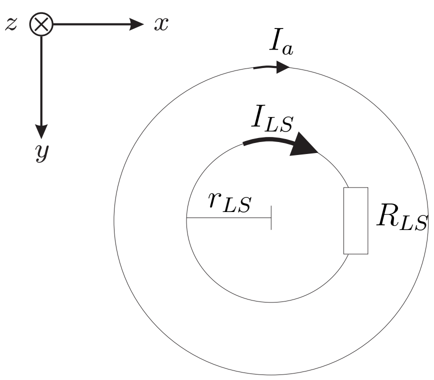


Abbildung 5: Leiterschleife innerhalb der Spule

c) Berechnen Sie den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife.

d) Berechnen Sie den Strom I_{LS}, der in der der Leiterschleife induziert wird. Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der elektrischen Verlustleistung P_{LS} im Widerstand R_{LS}.

<u>Hinweis:</u> Für Wechselspannungen berechnet sich der zeitliche Mittelwert P der Leistung an einem Wirkwiderstand gemäß der Formel $P = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I} = \frac{1}{2}R\hat{I}^2 = \frac{1}{2R}\hat{U}^2$. Dabei bezeichnen $\hat{U}$ und $\hat{I}$ die Scheitelwerte der Spannung bzw. des Stromes.

An die lange Spule wird nun statt des Wechselstroms ein Gleichstrom $I_a = I_0$ angelegt. Die Leiterschleife ist jetzt drehbar, wie in Abb. 6 dargestellt, und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{LS}. Zum Zeitpunkt $t = 0$ stehe die Leiterschleife senkrecht innerhalb der Spule, also wie in Abb. 6 gezeigt.

Es wird nach wie vor angenommen, dass ein Strom in der Leiterschleife keine Auswirkungen auf das Magnetfeld und den Strom der umgebenden Spule hat.

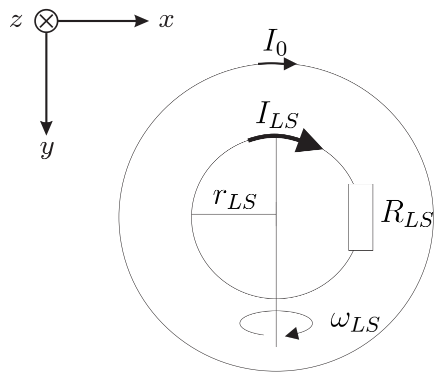


Abbildung 6: Drehbare Leiterschleife innerhalb der Spule

e) Berechnen Sie auch für diesen Fall den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife sowie den Strom in der Leiterschleife.

Wie groß muss die Winkelgeschwindigkeit ω_{LS} gewählt werden, damit im Widerstand R_{LS} die gleiche mittlere Verlustleistung entsteht wie zuvor? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 3 (16 Punkte)

a) In der Spule liegt aufgrund der Symmetrie lediglich ein Magnetfeld in z-Richtung vor. Das Magnetfeld innerhalb einer langen Spule ist homogen, d.h. die Feldstärke ist konstant. Mit dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H}\, d\vec{s} = I$ ergibt sich daher für die Komponente H_z der Feldstärke:

$$H_z l = nI_a$$

Mit $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$ und $\mu_r = 1$ folgt damit insgesamt

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{n}{l} I_a \ \vec{e}_z$$

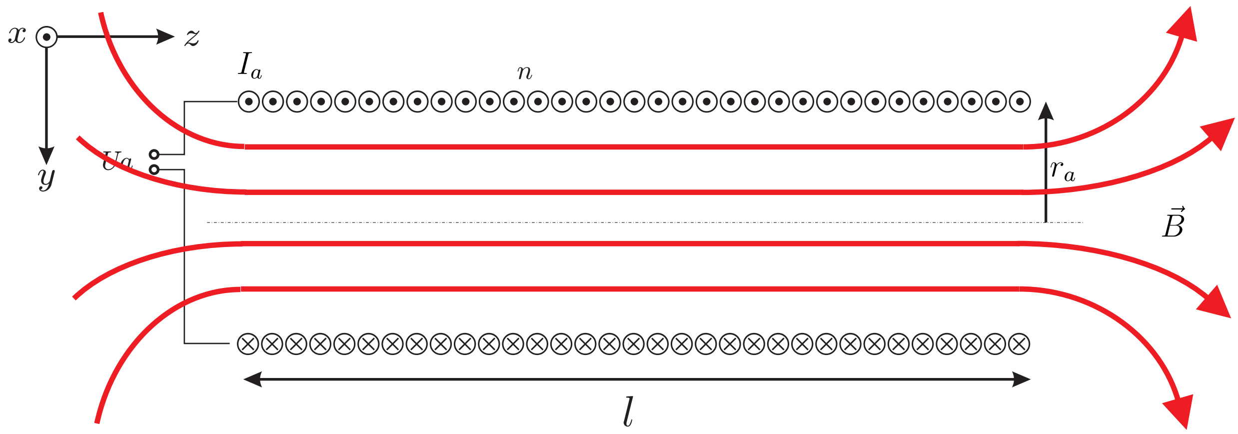


Abbildung 7: Flussdichte innerhalb der langen Spule

b) Einsetzen in Formel für Energiedichte aus Formelsammlung

$$w_m = \frac{1}{2} H\, B = \frac{1}{2}\mu_0\, H^2$$

mit $H = |\vec{H}| = \frac{nI_a}{l}$ und $I_a = I_0 \sin(\omega_0 t)$ von oben ergibt

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{n^2}{l^2} I_0^2 \sin^2(\omega_0 t)\,.$$

Diese Energiedichte ist ortsunabhängig, daher vereinfacht sich das Volumenintegral hier zu einer Multiplikation

$$\begin{aligned} W_m &= \int w_m dv = w_m \cdot V_{Spule} \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 \frac{n^2}{l^2} I_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \cdot l\, \pi R^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 \frac{n^2}{l} \pi R^2\, I_0^2 \sin^2(\omega_0 t)\,. \end{aligned}$$

c) Der magnetische Fluss durch die Leiterschleife ergibt sich durch Integration über die Fläche $\vec{A}$ der Leiterschleife

$$\Phi = \int\int \vec{B} d\vec{A}.$$

Das magnetische Feld innerhalb der langen Spule ist homogen, da die Feldstärke ortsunabhängig $H = \frac{nI_a}{l} = I_0 \frac{n}{l} \sin(\omega_0 t)$ ist. Es steht senkrecht zur Leiterschleife. Damit vereinfacht sich das Integral zur Berechnung des magnetischen Flusses hier zu einer Multiplikation

$$\begin{aligned}\Phi &= \mu_0 \, H \, A = \\ &= \mu_0 \, \frac{nI_a}{l} \, \pi r_{LS}^2 \\ &= \mu_0 \, I_0 \, \pi r_{LS}^2 \frac{n}{l} \sin(\omega_0 t)\end{aligned}$$

d) Ausgangspunkt ist die Formel für die Induktionsspannung $U_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt}$. Die Leiterschleife besitzt $N = 1$ Windung. Am ohmschen Widerstand gilt $I_{LS} = \frac{U_{ind}}{R_{LS}}$. Umgeformt folgt

$$\begin{aligned}I_{LS} &= \frac{U_{ind}}{R_{LS}} \\ &= \frac{-1}{R_{LS}} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= \frac{-1}{R_{LS}} \frac{d}{dt} \left\{ \mu_0 \, I_0 \, \pi r_{LS}^2 \frac{n}{l} \sin(\omega_0 t) \right\} \\ &= \frac{-1}{R_{LS}} \, \mu_0 \, I_0 \, \pi r_{LS}^2 \frac{n}{l} \, \{ \cos(\omega_0 t) \cdot \omega_0 \} \\ &= -\frac{\mu_0 \, \pi r_{LS}^2 n}{l} \, \omega_0 \, \frac{I_0}{R_{LS}} \, \cos(\omega_0 t) \, .\end{aligned}$$

Hinweis zum Vorzeichen von I_{LS} (nicht als Antwort verlangt): Der Strom in der Leiterschleife fließt so, dass das von ihm erzeugte H-Feld der Änderung des H-Feldes der umgebenden Spule entgegenwirkt. Genau dies wird von der resultierenden Formel für I_{LS} beschrieben, denn:

- I_a und damit Φ bzw. das H-Feld nehmen ab, wenn das Argument des $\sin(\ldots)$-Terms im Bereich $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ist. In diesem Intervall ist I_{LS} positiv, da der $-\cos$-Term hier positiv ist. Gemäß der Rechte-Hand-Regel wird durch I_{LS} ein H-Feld in z-Richtung erzeugt, das somit der Abnahme des von I_a erzeugten H-Feldes entgegenwirkt.
- I_a und damit Φ bzw. das H-Feld nehmen zu, wenn das Argument des $\sin(\ldots)$-Terms im Bereich $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ oder $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ist. In diesem Intervall ist I_{LS} negativ, da der $-\cos$-Term hier negativ ist. Gemäß der Rechte-Hand-Regel wird durch I_{LS} ein H-Feld entgegen der z-Richtung erzeugt, das somit der Zunahme des von I_a erzeugten H-Feldes entgegenwirkt.

Die Leistung im ohmschen Widerstand ist gemäß des gegebenen Hinweises

$$\begin{aligned}P_{LS} &= \frac{1}{2} \, R_{LS} \, \hat{I_{LS}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \, R_{LS} \, \left(\frac{\mu_0 \, \pi r_{LS}^2 n}{l} \, \omega_0 \, \frac{I_0}{R_{LS}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2R_{LS}} \, \left(\frac{\mu_0 \, \pi r_{LS}^2 n}{l} \, \omega_0 \, I_0 \right)^2\end{aligned}$$

e) Der Gleichstrom $I = I_0$ erzeugt ein zeitunabhängiges Feld $H = \frac{nI_0}{l}$, das wie zuvor innerhalb der Spule homogen ist und nur eine Komponente in z-Richtung besitzt.

Der Anteil der Fläche der Leiterschleife, der senkrecht zur Feldrichtung steht, ist jetzt zeitabhängig und es gilt

$$A(t) = A_0 \cos(\omega_{LS}\, t) = \pi r_{LS}^2 \cos(\omega_{LS}\, t)\,.$$

Der magnetische Fluss durch die Leiterschleife ergibt sich wieder durch Integration über die Fläche der Leiterschleife, wobei jetzt gilt:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int\int \vec{B} d\vec{A} \\ &= \mu_0 \frac{nI_0}{l}\, \pi r_{LS}^2 \cos(\omega_{LS}\, t)\end{aligned}$$

Bestimmung der gesuchten Winkelgeschwindigkeit

Variante 1: Mathematische Begründung mittels Koeffizientenvergleich in den Formeln für $\hat{I_{LS}}$

Analog zu oben folgt für den Strom

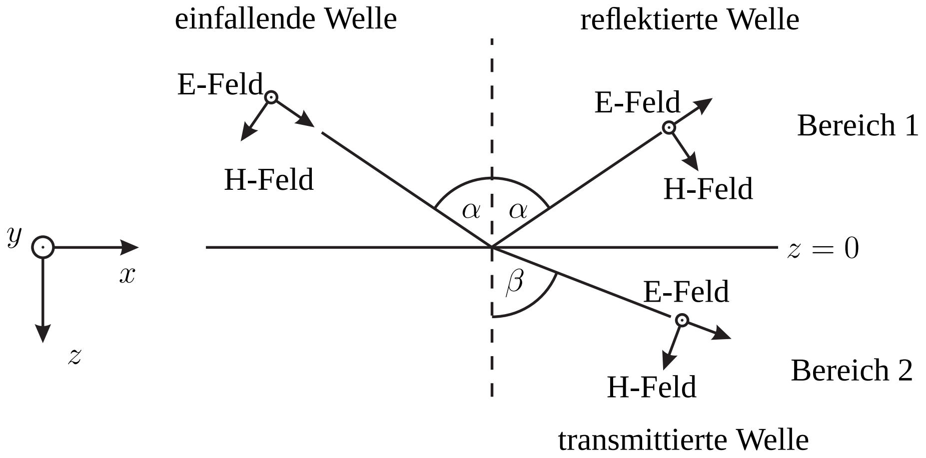
$$\begin{aligned}I_{LS} &= \frac{U_{ind}}{R_{LS}} \\ &= \frac{-1}{R_{LS}} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= \frac{-1}{R_{LS}} \frac{d}{dt} \left\{ \mu_0 \frac{n\, I_0}{l}\, \pi r_{LS}^2 \cos(\omega_{LS}\, t) \right\} \\ &= \frac{-1}{R_{LS}} \mu_0 \frac{n\, I_0}{l}\, \pi r_{LS}^2\, (-1) \sin(\omega_{LS}\, t) \cdot \omega_{LS} \\ &= \frac{\omega_{LS}}{R_{LS}} \mu_0 \frac{n\, \pi r_{LS}^2 I_0}{l} \sin(\omega_{LS}\, t) \\ &= \frac{\mu_0\, \pi r_{LS}^2\, n}{l} \omega_{LS} \frac{I_0}{R_{LS}} \sin(\omega_{LS}\, t)\end{aligned}$$

Die mittlere Verlustleistung $P_{LS} = \frac{1}{2} R_{LS}\, \hat{I_{LS}}$ ist genau dann gleich, wenn die Scheitelwerte des Stroms gleich sind. Der Phasenunterschied spielt für die mittlere Verlustleistung keine Rolle. Daher folgt durch Koeffizientenvergleich $\omega_{LS} = \omega_0$. Dies bedeutet, dass sich die Leiterschleife innerhalb des konstanten Magnetfelds hier genau gleich schnell drehen soll wie der Phasenzeiger des Wechselstrom in den Aufgabenteilen a) bis d).

Variante 2: Physikalisch-anschauliche Begründung Im Widerstand R_{LS} entsteht genau dann die gleiche Verlustleistung, wenn sich der magnetische Fluss $\Phi = \int\int \vec{B} d\vec{A}$ durch die Leiterschleife auf die gleiche Weise - d.h. mit der gleichen Frequenz - ändert. Ob dies durch eine Änderung von $\vec{B}$ (erster Fall: angelegte Wechselspannung mit Winkelgeschwindigkeit ω_0) oder durch eine Änderung von $\vec{A}$ (zweiter Fall: rotierende Leiterschleife mit Winkelgeschwindigkeit ω_{LS}) zustande kommt, spielt keine Rolle. Daher müssen die Frequenzen bzw. Winkelgeschwindigkeiten dieser Änderungsvorgänge gleich sein, d.h. $\omega_{LS} = \omega_0$.

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Eine elektromagnetische Welle mit der Frequenz ω und dem E-Feld $\vec{E}_e$ trifft unter einem Winkel α auf eine Grenzfläche bei $z = 0$. Die reflektierte Welle sei $\vec{E}_r$, die transmittierte $\vec{E}_t$. Im Bereich 1 ($z < 0$) sei $\varepsilon = \varepsilon_1$; im Bereich 2 ($z \geq 0$) sei $\varepsilon = \varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Im ganzen Raum gelte die Permeabilität μ.



Für das E-Feld seien die Amplituden E_e, E_r und E_t bekannt. Es gilt:

$$\vec{E}_e = E_e\, e^{j\omega t}\, e^{-jk_1 \sin(\alpha)\, x}\, e^{-jk_1 \cos(\alpha)\, z} \vec{e}_y$$
$$\vec{E}_r = E_r\, e^{j\omega t}\, e^{-jk_1 \sin(\alpha)\, x}\, e^{jk_1 \cos(\alpha)\, z} \vec{e}_y$$
$$\vec{E}_t = E_t\, e^{j\omega t}\, e^{-jk_2 \sin(\beta)\, x}\, e^{-jk_2 \cos(\beta)\, z} \vec{e}_y$$

a) Setzen Sie das E-Feld in die Wellengleichung ein und berechnen Sie ω in Abhängigkeit von k_1 und ε_1.

b) Errechnen Sie $\vec{H}_e$ und bestimmen Sie den Wellenwiderstand $\Gamma = \frac{|\vec{E}_e|}{|\vec{H}_e|}$ in Abhängigkeit von den Materialkonstanten.

c) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil b), dass gilt

$$\vec{H}_e = \frac{1}{\Gamma} \vec{e}_k \times \vec{E}_e$$

wobei $\vec{e}_k$ der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung ist.

d) Das Medium im Bereich 1 sei optisch dichter als das Medium im Bereich 2 ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$). Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen α und β. Ab welchem Winkel α_c tritt Totalreflexion ein?

e) Im Falle der Totalreflexion kann die Welle im Bereich 2 wie folgt geschrieben werden:

$$\vec{E}_t = E_t\, e^{j\omega t}\, e^{-ja\, x}\, e^{-b\, z} \vec{e}_y$$

Bestimmen Sie die Konstanten a und b abhängig von α und <u>un</u>abhängig von β.

<u>Hinweis:</u> Der Zusammenhang aus d) gilt weiterhin, wobei β komplex ist. Benutzen Sie außerdem

$$\cos(\beta) = -j\sqrt{\sin^2(\beta) - 1}$$

Lösung 4 (16 Punkte)

a) Der Zusammenhang von ω mit k_1 und ε_1 wird mit der Wellengleichung hergeleitet. Die Wellengleichung für Nicht-Leiter ist

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(-jk_1\sin(\alpha))^2 + (-jk_1\cos(\alpha))^2 - \varepsilon_1\mu\,(j\omega)^2 &= 0\\ -k_1^2\left(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right) + \varepsilon_1\mu\omega^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\omega = \frac{k_1}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}}$$

b) Für $\vec{H}_e$ kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$\vec{H}_e = (H_{e,x}\vec{e}_x + H_{e,z}\vec{e}_z)\,e^{j\omega t}\,e^{-jk_1\sin(\alpha)\,x}\,e^{-jk_1\cos(\alpha)\,z}$$

Mit der Maxwellgleichung

$$\operatorname{rot}\vec{E}_e = -\dot{\vec{B}}_e$$

ergbt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{E}_e &= \vec{e}_x\left(jk_1\cos(\alpha)E_e\,e^{j\omega t}\,e^{-jk_1\sin(\alpha)x}\,e^{-jk_1\cos(\alpha)z}\right)\\ &\quad+\vec{e}_z\left(-jk_1\sin(\alpha)E_e\,e^{j\omega t}\,e^{-jk_1\sin(\alpha)x}\,e^{-jk_1\cos(\alpha)z}\right)\\ -\mu\dot{\vec{H}}_e &= -\,\mu\,(H_{e,x}\vec{e}_x + H_{e,z}\vec{e}_z)\,j\omega\,e^{j\omega t}\,e^{-jk_1\sin(\alpha)\,x}\,e^{-jk_1\cos(\alpha)\,z}\end{aligned}$$

Durch Vergleich der vektoriellen Größen ergibt sich:

$$H_{e,x} = -\frac{k_1\cos(\alpha)}{\omega\varepsilon_0}E_e$$

$$H_{e,z} = \frac{k_1\sin(\alpha)}{\omega\varepsilon_0}E_e$$

Weiter gilt

$$\left|\vec{H}_e\right| = E_e\frac{k_1}{\mu\omega}$$

und mit dem Ergebnis aus a)

$$\omega = \frac{k_1}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}}$$

$$\left|\vec{H}_e\right| = E_e\frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu}}{\mu} = E_e\frac{\varepsilon_1}{\mu}$$

Der Wellenwiderstand ist damit:

$$\Gamma = \frac{\left|\vec{E}_e\right|}{\left|\vec{H}_e\right|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}}$$

c) Aus Aufgabenteil b) ist bekannt

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}}$$

Der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung ist

$$\vec{e}_k = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{H}_e &= \frac{\varepsilon_1}{\mu} \left(\sin(\alpha)\vec{e}_z - \cos(\alpha)\vec{e}_x\right) E_e \, e^{j\omega t} \, e^{-jk_1 \sin(\alpha)\,x} \, e^{-jk_1 \cos(\alpha)\,z} \\ &= \frac{k_1}{\omega\mu} \left(\sin(\alpha)\vec{e}_z - \cos(\alpha)\vec{e}_x\right) E_e \, e^{j\omega t} \, e^{-jk_1 \sin(\alpha)\,x} \, e^{-jk_1 \cos(\alpha)\,z} \end{aligned}$$

und identisch zum Aufgabenteil b).

d) Die Tangentialkomponente des E-Feldes muss bei $z = 0$ stetig sein. Also

$$E_{e,y} + E_{r,y} = E_{t,y}$$

$$E_e \, e^{-jk_1 \sin(\alpha)\,x} + E_r e^{-jk_1 \sin(\alpha)\,x} = E_t e^{-jk_2 \sin(\beta)\,x}$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} E_e + E_r &= E_t \\ k_1 \sin(\alpha) &= k_2 \sin(\beta) \end{aligned}$$

Aus $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ folgt mit $\omega = \frac{k_1}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}}$

$$k_1 > k_2$$

Totalreflexion ist vorhanden bei

$$\frac{k_1}{k_2} \sin(\alpha_c) = 1$$

bzw.

$$\alpha_c = \arcsin\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

e) Aus dem gleichen Zusammenhang wie in d)

$$E_e \, e^{-jk_1 \sin(\alpha)\,x} + E_r \, e^{-jk_1 \sin(\alpha)\,x} = E_t \, e^{-ja\,x}$$

folgt

$$a = k_1 \sin(\alpha)$$

Die Konstante b erhält man aus dem Verlgeich mit $\vec{E}_t$ aus der Aufgabenstellung zu

$$b = jk_2 \cos(\beta) = jk_2(-j\sqrt{\sin^2\beta - 1}) = k_2\sqrt{\sin^2\beta - 1} = k_2\sqrt{\frac{k_1^2}{k_2^2}\sin^2\alpha - 1}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)
Für Hohlleiterwellen, die sich in z-Richtung ausbreiten, kann allgemein folgender Ansatz gemacht werden:

$$E_z = E_z^0(x,y)e^{j(\omega t - k_z z)} \qquad H_z = H_z^0(x,y)e^{j(\omega t - k_z z)}$$

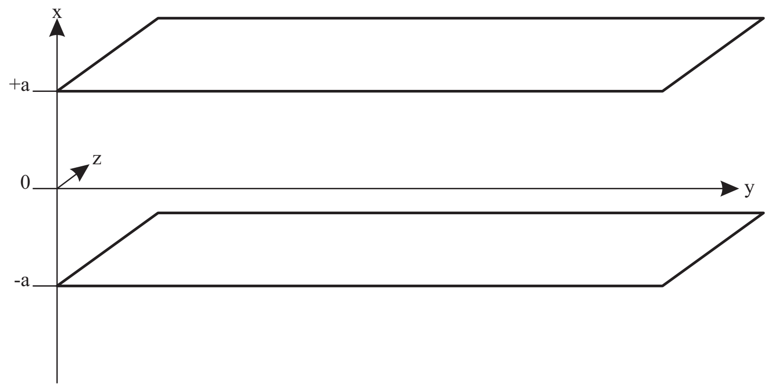
$$E_x = -\frac{1}{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - k_z^2}\left(j\,k_z\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\,\omega\,\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

$$E_y = -\frac{1}{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - k_z^2}\left(j\,k_z\frac{\partial E_z}{\partial y} - j\,\omega\,\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$H_x = -\frac{1}{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - k_z^2}\left(j\,k_z\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\,\omega\,\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$

$$H_y = -\frac{1}{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - k_z^2}\left(j\,k_z\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\,\omega\,\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

Nun soll sich eine TM-Welle zwischen zwei in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnten Platten, wie in der Zeichnung unten angegeben, in z-Richtung ausbreiten.



a) Machen Sie einen allgemeinen Ansatz für die Feldkomponente in z-Richtung indem Sie den Ansatz oben vereinfachen. (Hinweis: Überlegen Sie welches Feld bei einer TM-Welle in z-Richtung vorhanden ist.)

b) Von welchen der Variablen x, y hängt die Amplitudenfunktion $E_z^0(x,y)$ bzw. $H_z^0(x,y)$ bei dieser Anordnung tatsächlich ab? Begründen Sie!

c) Welche Randbedingungen muss das elektrische Feld erfüllen?

d) Bestimmen sie anhand der Randbedingungen aus b) und c) die Amplitudenterme E_z^0 und H_z^0 in der z-Komponente der TM-Welle. Zeigen Sie dabei, dass 2 der folgenden 4 Terme für die Amplitudenfunktion in Frage kommen: $A\ \sin(k_x x)$, $B\ \sin(k_y y)$, $C\ \cos(k_x x)$, $D\ \cos(k_y y)$. Bestimmen Sie für diese 2 möglichen Ansätze das dazugehörige k_x bzw. k_y.

e) Bestimmen Sie mit Hilfe der Wellengleichung $\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0$ die Wellenzahl k_z als Funktion von ω, k_x und k_y soweit in der Lösung vorhanden.

f) Wie lautet die Cut-Off Frequenz?

Lösung 5 (16 Punkte)

a) Bei der TM-Welle (transversal magnetisch) gibt es nur eine E_z-Komponente.

$H_z = 0 \qquad E_z = \; E_z^0(x,y)e^{j(\omega t - k_z z)}$

b) Da die Platten in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnt sind, kann der Amplitudenterm nur von x abhängen.

c) Die Tangentialkomponenten des E-Feldes müssen an den leitenden Platten verschwinden :

$$\begin{aligned} E_y(x=-a,y,z) &= E_y(a,y,z) = 0 \text{ und} \\ E_z(x=-a,y,z) &= E_z(a,y,z) = 0 \end{aligned}$$

d) Die Randbedingungen aus Aufgabenteil b) können sowohl mit der Kosinus- als auch mit der Sinusfunktion erfüllt werden, außerdem hängt sie nur von x ab. Daher kommen folgende Ansätze für E_z^0 in Frage:

$$\begin{aligned} E_z^0(x) &= A\,\sin(k_x x) \quad k_x = \frac{\pi n}{a}; n = 1,2,3,... \\ E_z^0(x) &= C\,\cos(k_x x) \quad k_x = \frac{\pi}{2a}(2n-1); n = 1,2,3,... \end{aligned}$$

A und C sind beliebige Amplitudenfaktoren.

e) Es wird die z-Komponente der Wellengleichung verwendet:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Nach kürzen erhält man:

$$-k_x^2 - k_z^2 + \mu\varepsilon\omega^2 = 0$$
$$\Rightarrow k_z = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 - k_x^2}$$

f) An der Cut-Off Frequenz wird die Wurzel in k_z gerade Null.

$\Rightarrow \; \omega_c = \sqrt{\frac{k_x^2}{\mu\varepsilon}}$