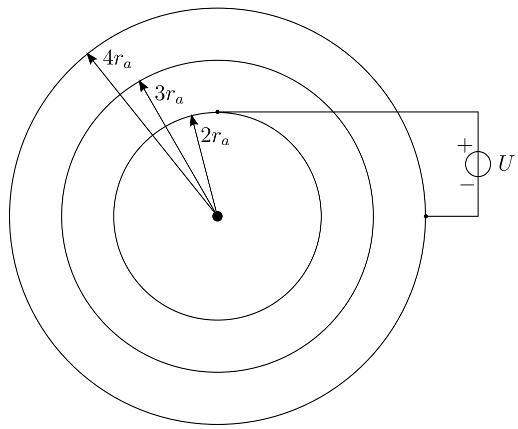
Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben sei folgende kugelsymmetrische Anordnung.



Die Kugel im Bereich $r < 2r_a$ sei aus ideal leitfähigem Material ($\kappa = \infty$) und werde durch eine Spannungsquelle auf das Potential $\Phi\left(2r_a\right) = U$ gebracht. Die äußere Kugelschale bei $r = 4r_a$ wird dabei auf ein Potential von $\Phi\left(4r_a\right) = 0$ gebracht.

Zwischen $2r_a < r \leq 3r_a$ befindet sich eine Kugelschale mit konstanter Dielektrizitätszahl $\varepsilon = \varepsilon_0$; die Kugelschale ist nicht leitfähig. Der Potentialverlauf $\Phi_b\left(r\right)$ für diesen Bereich ist der untenstehenden Tabelle 1 zu entnehmen.
Die Kugelschale zwischen $3r_a < r \leq 4r_a$ ist ebenfalls nicht leitfähig besitzt aber eine unbekannte Dielektrizitätszahl ε_c. Der Potentialverlauf $\Phi_c\left(r\right)$ dieser Kugelschale ist ebenfalls in Tabelle 1 gegeben.

$0 \leq r \leq 2r_a$:	$\kappa = \infty$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\Phi_a\left(r\right) = U$
$2r_a < r \leq 3r_a$:	$\kappa = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\Phi_b\left(r\right) = a\left(r - 2.5r_a\right)^2 + \alpha U$ mit $\alpha > 1.0$
$3r_a < r \leq 4r_a$:	$\kappa = 0$	$\varepsilon_c = ?$	$\Phi_c\left(r\right) = \frac{d}{r} + e$
$4r_a < r < \infty$:	$\kappa = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\Phi_d\left(r\right) = 0$

Tabelle 1: Parameter der kugelsymmetrischen Anordnung

a) Skizzieren Sie den Potentialverlauf und bestimmen Sie die Parameter a, d, e in Abhängigkeit von U, α und r_a.

b) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ in Abhängigkeit von r im gesamten Raum.

c) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte σ bei $r = 2r_a$.

d) Wie groß muss die Dielektrizitätszahl ε_c im Bereich $3r_a < r \leq 4r_a$ sein, wenn man annimmt, dass sich keine Flächenladungsdichte an der Grenzfläche $r = 3r_a$ ergibt?

e) Bestimmen Sie die Feldenergie der gesamten Anordnung. Für diesen Aufgabenteil wird α nahe 1.0 angenommen. Dadurch kann der Anteil der Feldenergie im Bereich $2r_a < r \leq 3r_a$ gegenüber den anderen Anteilen vernachlässigt werden.

Lösung 1 (16 Punkte)

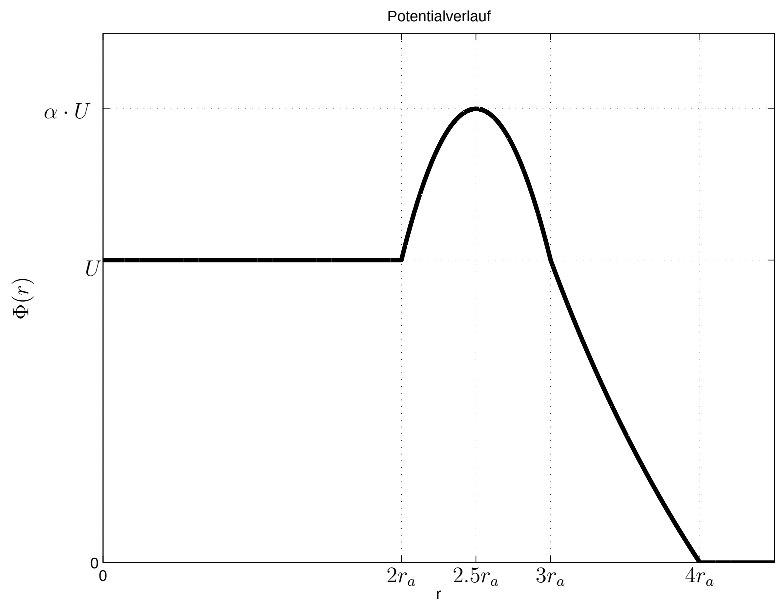


Abbildung 1: Skizze des Potentialverlaufs

a) Mit Hilfe der Skizze und der Stetigkeitsbedingung des Potentials lassen sich folgende Randbedingungen festlegen:

$$\Phi(2r_a) = U \tag{1}$$
$$\Phi(3r_a) = U \tag{2}$$
$$\Phi(4r_a) = 0 \tag{3}$$

Damit kann a bestimmt werden zu:

$$\Phi(2r_a) = a(2r_a - 2.5r_a)^2 + \alpha U \tag{4}$$
$$= 0.25ar_a^2 + \alpha U = U \tag{5}$$
$$\Rightarrow a = \frac{4(1-\alpha)U}{r_a^2} \tag{6}$$

Berechnung von d und e:

$$\Phi(3r_a) = \frac{d}{3r_a} + e = U \tag{7}$$
$$\Phi(4r_a) = \frac{d}{4r_a} + e = 0 \tag{8}$$

Subtraktion von (8) von (7) ergibt

$$d\left(\frac{1}{3r_a} - \frac{1}{4r_a}\right) = U \tag{9}$$
$$\frac{1}{12r_a}d = U \tag{10}$$
$$\Rightarrow d = 12r_aU \tag{11}$$

Damit lässt sich e mit (8) bestimmen.

$$e = -\frac{d}{4r_a} = -\frac{12r_aU}{4r_a} = -3U \tag{12}$$

b) Aufgrund der Kugelsymmetrie ergibt sich $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$. Außerdem gilt $\vec{E} = -\mathrm{grad}\Phi$. Zusammengefasst ergibt sich $E_r(r) = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}$.

$$\begin{aligned}
0 < r \leq 2r_a:\ \Phi(r) = U \Rightarrow E_r &= 0 && (13)\\
2r_a < r \leq 3r_a:\ \Phi(r) = a\left(r - 2.5r_a\right)^2 + \alpha U \Rightarrow E_r &= -2r_a\left(r - 2.5r_a\right) &&\\
&= \frac{8\left(\alpha-1\right)U}{r_a^2}\left(r - 2.5r_a\right) && (14)\\
3r_a < r \leq 4r_a:\ \Phi(r) = \frac{d}{r} + e \Rightarrow E_r &= -\left(-\frac{d}{r^2}\right) = \frac{12r_aU}{r^2} && (15)\\
4r_a < r < \infty:\ \Phi(r) = 0 \Rightarrow E_r &= 0 && (16)
\end{aligned}$$

c) Ansatz $\sigma = D_{n_2} - D_{n_1}$. An der Stelle $r = 2r_a$ gilt:

$$D_{n_1} = \varepsilon_0 E_{n_1} = 0 \tag{17}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sigma &= D_{n_2} && (18)\\
&= \varepsilon_0 E_{n_2} = \varepsilon_0 \frac{8\left(\alpha-1\right)U}{r_a^2}\left(2r_a - 2.5r_a\right) && (19)\\
&= -\frac{4\varepsilon_0\left(\alpha-1\right)U}{r_a} && (20)
\end{aligned}$$

d) Ansatz: Keine Flächenladungsdichte $\Rightarrow D_{n_2} = D_{n_1}$. An der Stelle $r = 3r_a$ gilt:

$$D_{n_1} = \varepsilon_0 E_{n_2} = \varepsilon_0 \frac{8\left(\alpha-1\right)U}{r_a^2}\left(3r_a - 2.5r_a\right) = \frac{4\varepsilon_0\left(\alpha-1\right)U}{r_a} \tag{21}$$

und

$$D_{n_2} = \varepsilon_c \frac{12r_aU}{9r_a^2}. \tag{22}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varepsilon_c &= \frac{4\varepsilon_0\left(\alpha-1\right)U}{r_a}\frac{9r_a^2}{12r_aU} && (23)\\
&= 3\left(\alpha-1\right)\varepsilon_0 && (24)
\end{aligned}$$

e) Für die Feldenergie gilt: $W_e = \int w_e dv = \int \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}dv = \int \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}^2 dv$. In den Bereichen $0 \leq r \leq 2r_a$ und $r > 4r_a$ ist kein elektrisches Feld vorhanden, daher gibt es von diesen Bereichen keinen Anteil an der Feldenergie. Die Feldenergie für den Bereich $2r_a < r \leq 3r_a$ kann laut Aufgabenstellung vernachlässigt werden. Für den Bereich $3r_a < r \leq 4r_a$ gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{E}^2 &= E_r^2 = \frac{d^2}{r^4} && (25)\\
W_e &= 2\pi\varepsilon_c \int\limits_{r=3r_a}^{4r_a} \frac{d^2}{r^4} r^2 dr = 2\pi\varepsilon_c d^2 \int\limits_{r=3r_a}^{4r_a} \frac{1}{r^2} dr = 2\pi\varepsilon_c d^2 \left[-\frac{1}{r}\right]_{3r_a}^{4r_a} && (26)\\
&= 24\pi\varepsilon_c r_a U^2 && (27)
\end{aligned}$$

Daraus folgt für $W_{e,ges}$:

$$W_{e,ges} = 24\pi\varepsilon_c r_a U^2 \tag{28}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

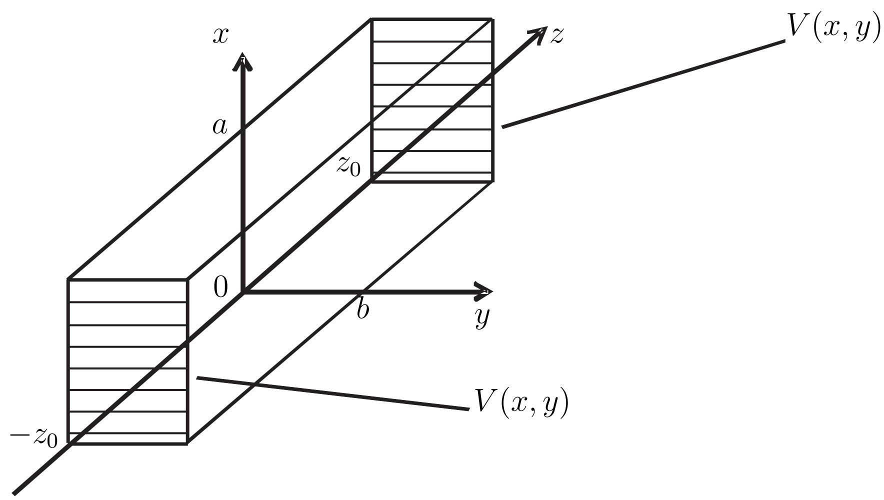


Abbildung 2: Rechteckiger Hohlleiter

Gegeben ist ein in z-Richtung von $z = -z_0$ bis $z = z_0$ ausgedehnter Hohlkörper mit rechteckigem Querschnitt. Das Potential auf den Wänden beträgt 0. Für das Potential Φ gilt also:

$$\Phi(0, y, z) = \Phi(a, y, z) = 0 \mid 0 \leq y \leq b$$
$$\Phi(x, 0, z) = \Phi(x, b, z) = 0 \mid 0 \leq x \leq a$$

In der Ebene $z = z_0$ und $z = -z_0$ sei das Potential über dem Querschnitt vorgegeben:

$$\Phi(x, y, z = z_0) = \Phi(x, y, z = -z_0) = V(x, y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

Hinweis: *Das Potential besitzt eine Abhängigkeit in z-Richtung.*

a) Separieren Sie die Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ des Potentials $\Phi(x, y, z)$ mit dem Produktansatz $\Phi(x, y, z) = \Phi_x(x) \cdot \Phi_y(y) \cdot \Phi_z(z)$ (mit Rechnung). Achten Sie dabei auf eine geschickte Wahl des Vorzeichens der Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ (mit Begründung).

   Hinweis: *Beachten Sie die Symmetrieeigenschaften des Potenzials bezüglich der z-Achse. Benutzen Sie einen Ansatz mit einer e-Funktion für die z-Abhängigkeit*

b) Geben Sie die Funktionen $\Phi_x(x), \Phi_y(y), \Phi_z(z)$ inklusive aller freien Parameter an, die sich aus der Wahl der Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ ergeben.

c) Bestimmen Sie nach Möglichkeit alle freien Parameter des Lösungsansatzes der Differentialgleichung anhand der gegebenen Randbedingungen. Für die Erfüllung einer beliebigen Randbedingung $V(x, y)$ bei $z = z_0 = -z_0$ ist ein Reihensansatz aus der Überlagerung aller allgemeinen Lösungen notwendig. Geben Sie diesen Reihenansatz für $\Phi(x, y, z)$ an.

   Hinweis: $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$

(Beachten Sie die Fortsetzung auf der folgenden Seite!)

d) Es liegt nun folgendes Potential $\Phi(x, y, z = z_0) = \Phi(x, y, z = -z_0)$ vor:

$$\Phi(x, y, z = z_0) = \Phi(x, y, z = -z_0) = \sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{2\pi y}{b})$$

Berechnen Sie anhand dieses Potentials die noch nicht bestimmten Koeffizienten des zuvor in Aufgabenteil c) ermittelten Reihenansatzes und geben Sie die Gesamtlösung von $\Phi(x, y, z)$ an.

e) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ zwischen den Platten aus dem in Aufgabenteil d) bestimmten Potential $\Phi(x, y, z)$ (nicht aus der Teillösung $\Phi(x, y, z = z_0) = \Phi(x, y, z = -z_0)$).

Lösung 2 (16 Punkte)

a)

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{29}$$

Produktansatz: $\Phi(x,y,z) = \Phi_x(x)\cdot\Phi_y(y)\cdot\Phi_z(z)$

$$\Rightarrow \Delta\Phi(x,y,z) = \Phi_y(y)\Phi_z(z)\frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2} + \Phi_x(x)\Phi_z(z)\frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2} + \Phi_x(x)\Phi_y(y)\frac{\partial^2\Phi_z(z)}{\partial z^2} = 0 \tag{30}$$

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \underbrace{\frac{1}{\Phi_x(x)}\frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2}}_{konst} + \underbrace{\frac{1}{\Phi_y(y)}\frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2}}_{konst} + \underbrace{\frac{1}{\Phi_z(z)}\frac{\partial^2\Phi_z(z)}{\partial z^2}}_{konst} = 0 \tag{31}$$

Die Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ werden anhand der Randbedingungen gewählt. Damit das Potential auf dem Rand Null wird werden die Konstanten für die x- und y-Abhängigkeit wie folgt gewählt:

$$\frac{1}{\Phi_x(x)}\frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 \tag{32}$$

$$\frac{1}{\Phi_y(y)}\frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 \tag{33}$$

Der daraus resultierende Sinus-Term in $\Phi_x(x)$ und $\Phi_y(y)$ genügt der Randbedingung bei $x = 0$ und $y = 0$. Damit auf der z-Achse ein symmetrisches Potential entsteht wird ein Ansatz mit einer e-Funktion benötigt. Die Konstante k_z wird daher gewählt zu:

$$\frac{1}{\Phi_z(z)}\frac{\partial^2\Phi_z(z)}{\partial z^2} = +k_z^2 \tag{34}$$

b) Daraus folgen die allgemeinen Gleichungen für $\Phi_x(x), \Phi_y(y), \Phi_z(z)$:

$$\Phi_x(x) = a_x\cos(k_x x) + b_x\sin(k_x x) \tag{35}$$

$$\Phi_y(y) = a_y\cos(k_y y) + b_y\sin(k_y y) \tag{36}$$

$$\Phi_z(z) = a_z e^{k_z z} + b_z e^{-k_z z} \tag{37}$$

c) Damit die Randbedingungen bei $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt sind muss $a_x = 0$ und $a_y = 0$ gelten. Ein symmetrisches Potential ergibt sich für $a_z = b_z$.

$$\Phi(x,y,z) = b_x \sin(k_x x) \cdot b_x \sin(k_y y) \cdot a_z(e^{k_z z} + e^{-k_z z}) \tag{38}$$
$$= B \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot (e^{k_z z} + e^{-k_z z}) \tag{39}$$

Aus $\Phi(a,y,z) = \Phi(x,b,z) = 0$ folgt für k_x und k_y:

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \ |n = 1,2,3,... \tag{40}$$
$$k_y = \frac{m\pi}{b} \ |m = 1,2,3,... \tag{41}$$

Aus $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ folgt:

$$k_z = \sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2} \tag{42}$$

eingesetzt ergibt dies:

$$\Phi(x,y,z) = B \cdot sin(\frac{n\pi}{a}x) \cdot sin(\frac{m\pi}{b}y) \cdot (e^{\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2}z} + e^{-\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2}z}) \tag{43}$$

Der allgemeine Reihenansatz lautet damit:

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} \cdot \sin(\frac{n\pi}{a}x) \cdot \sin(\frac{m\pi}{b}y) \cdot (e^{\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2}z} + e^{-\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2}z}) \tag{44}$$

d) Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$n = 1 \tag{45}$$
$$m = 2 \tag{46}$$

Daraus folgt:

$$\Phi(x,y,z = z_0 = -z_0) = B_{1,2} \cdot \sin(\frac{\pi}{a}x) \cdot \sin(\frac{2\pi}{b}y) \cdot (e^{\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z_0} + e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z_0}) \tag{47}$$

Damit die Vorgabe aus Aufgabenteil d) erfüllt ist muss $B_{1,2}$ zu

$$B_{1,2} = \frac{1}{e^{\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z_0} + e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z_0}}, B_{n,m} \text{ sonst } = 0; \tag{48}$$

gewählt werden

e) Das $\vec{E}$-Feld berechnet sich mit $\vec{E} = -grad(\Phi)$ zu:

$$\vec{E} = B_{1,2} \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{a}\cos(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{2\pi y}{b})(e^{\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z} + e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z}) \\ -\frac{2\pi}{b}\sin(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{2\pi y}{b})(e^{\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z} + e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z}) \\ -\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{2\pi y}{b})(e^{\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z} - e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z}) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Eine lange Spule mit Länge l hat n Windungen und einen kreisförmigen Querschnitt mit Durchmesser d_a. Sie ist an eine Stromquelle angeschlossen, die den sinusförmigen Wechselstrom $I_a = I_0 \sin(\omega_0 t)$ liefert.

Es gilt die Annahme, dass Felder innerhalb von Spulen homogen sind. Inhomogene Felder außerhalb von Spulen sind zu vernachlässigen.

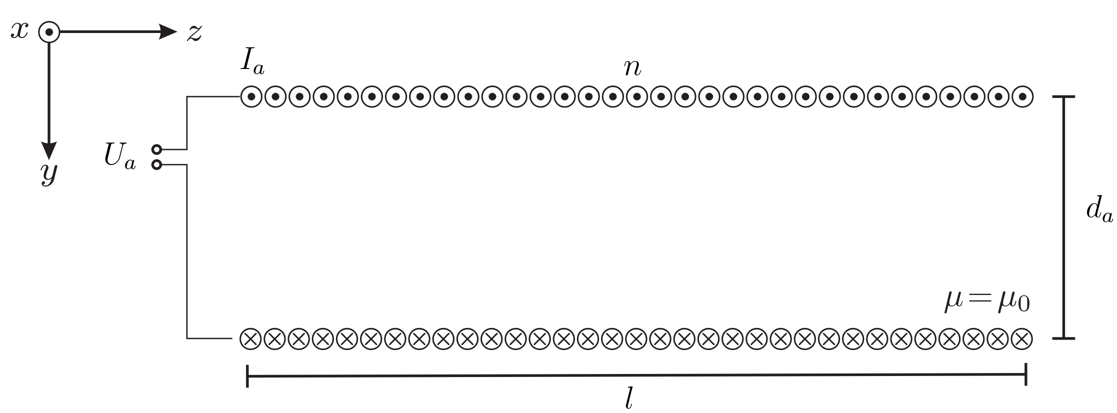


Abbildung 3: Längsansicht der langen Spule

a) Skizzieren Sie den Verlauf der magnetischen Feldlinien innerhalb der Spule in Abb. 3. Kennzeichnen Sie die Richtung.

   Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}_a$ innerhalb der Spule.

b) Berechnen Sie den selbstinduzierten magnetischen Fluss Φ_{aa} der Spule. (Es ist **nicht** der **verkettete** magnetische Fluss gesucht.)

   Berechnen Sie den Selbstinduktionskoeffizienten L_{aa}.

   Berechnen Sie die Energie W_1, die im magnetischen Feld gespeichert ist.

   Hinweis: Als Lösungen gesucht sind zeitabhängige Ausdrücke, die nur I_0, ω_0 sowie Parameter der Spule und Naturkonstanten enthalten.

Beachten Sie die Fortsetzung auf der folgenden Seite!

Jetzt wird die Spule aus Abb. 3 in eine größere Spule mit kreisförmigem Querschnitt eingebracht. Diese äußere Spule besitzt ebenfalls die Länge l und Windungszahl n, allerdings einen mindestens genauso großen Durchmesser $d_b \geq d_a$. Die gesamte Anordnung ist in der Querschnittszeichnung Abb. 4 dargestellt.

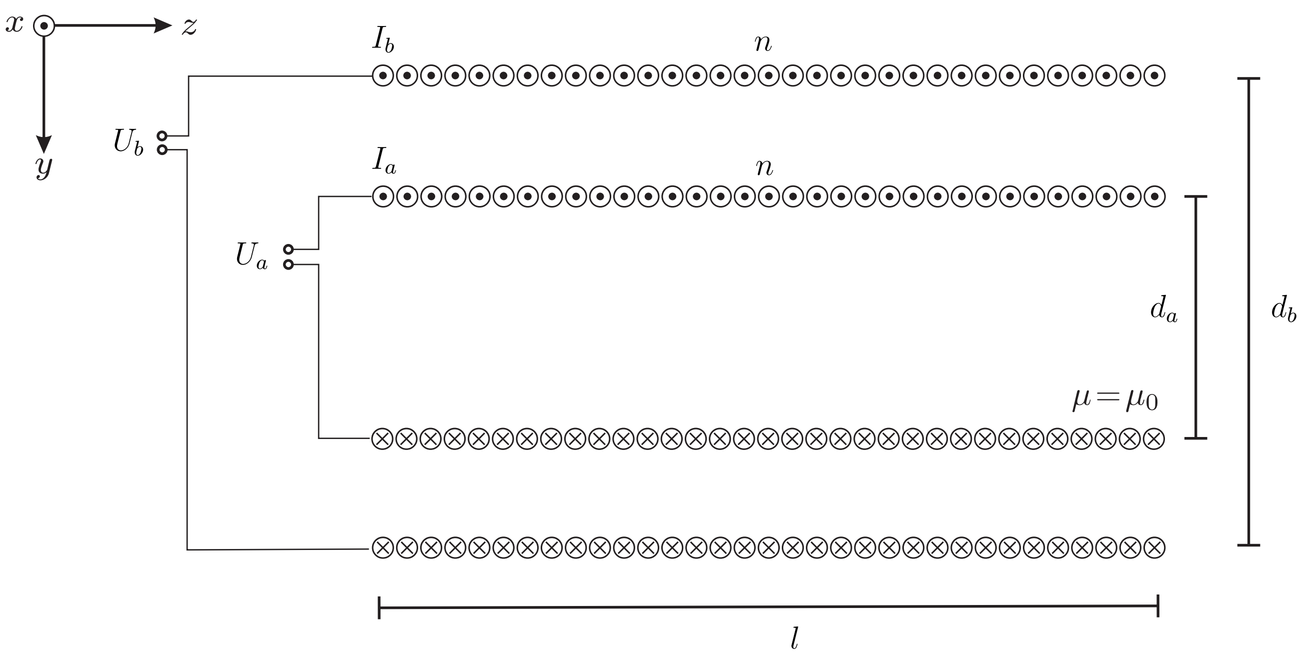


Abbildung 4: Anordnung der inneren und äußeren Spule

c) Berechnen Sie die Induktionskoeffizienten L_{ab}, L_{ba} und L_{bb}.

d) Die Kontakte der äußeren Spule werden nun kurzgeschlossen ($U_b = 0$). In die innere Spule wird unverändert der Strom $I_a = I_0 \sin(\omega_0 t)$ einprägt.

Berechnen Sie den Strom I_b in der äußeren Spule. Dabei sind ohmsche Widerstände zu vernachlässigen ($R_a = R_b = 0$). Nehmen Sie an, dass der Strom I_b **keinen** Gleichanteil besitzt.

Hinweise:

- Dies stellt einen verlustlosen Transformator dar, an dessen Primärseite die Stromquelle angeschlossen und dessen Sekundärseite kurzgeschlossen ist.
- Hinweis: Die magnetischen Flüsse in den Spulen überlagern sich (Superpositionsprinzip). Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \Phi_{aa} + \Phi_{ba} \\ &= \tfrac{L_{aa}}{n} I_a + \tfrac{L_{ba}}{n} I_b \\ \Phi_b &= \Phi_{ab} + \Phi_{bb} \\ &= \tfrac{L_{ab}}{n} I_a + \tfrac{L_{bb}}{n} I_b. \end{aligned}$$

e) Berechnen Sie die magnetische Feldenergie der Anordnung der zwei Spulen (für beliebige Durchmesser $d_b \geq d_a$).

Betrachten Sie dann den Spezialfall, dass beide Spulen den gleichen Durchmesser haben ($d_a = d_b$). Wie groß ist jetzt die Feldenergie? Erklären Sie diese Tatsache anschaulich in Worten.

Lösung 3 (16 Punkte)

a) In der Spule liegt aufgrund der Symmetrie lediglich ein Magnetfeld in z-Richtung vor. Das Magnetfeld innerhalb einer langen Spule ist homogen, d.h. die Feldstärke ist konstant. Mit dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H}\, d\vec{s} = I$ ergibt sich dann

$$H_a l = nI_a$$
$$\vec{H}_a = \frac{nI_a}{l}\vec{e}_z = \frac{nI_0\,\sin(\omega_0 t)}{l}\vec{e}_z.$$

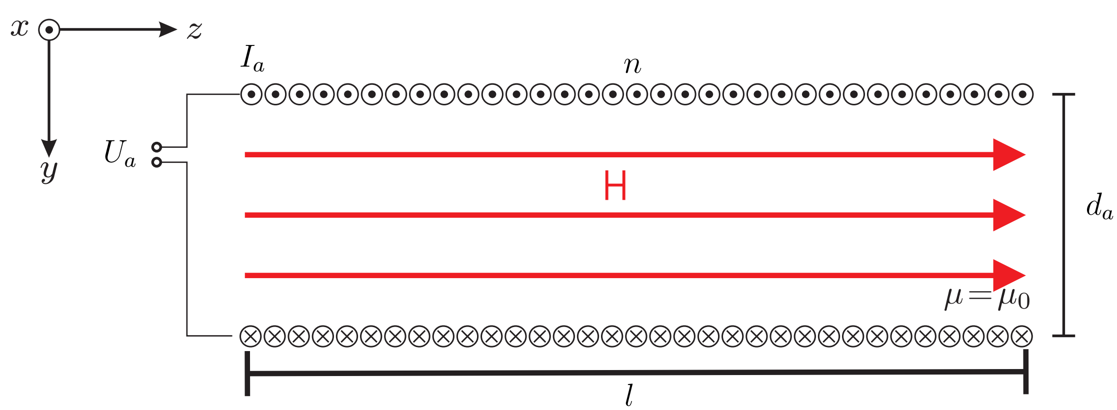


Abbildung 5: Magnetische Feldlinien innerhalb der Spule

b) Die durchflossene Fläche der Spule ist $\pi\frac{d_a^2}{4}$. Der selbstinduzierte magnetische Fluss ist

$$\begin{aligned}\Phi_{aa} &= \mu_0\, H_a\, \pi\frac{d_a^2}{4} \\ &= \mu_0\, \frac{nI_a}{l}\,\pi\frac{d_a^2}{4} \\ &= \mu_0\, \frac{nI_0\,\sin(\omega_0 t)}{l}\,\pi\frac{d_a^2}{4}.\end{aligned}$$

Verwendung von $L^{(a)} = \frac{N\Phi^{(a)}}{I}$ aus Formelsammlung ergibt

$$L_{aa} = \frac{n\Phi_{aa}}{I_a} = \mu_0\,\frac{n^2}{l}\,\pi\frac{d_a^2}{4}.$$

Die magnetische Feldenergie ist gemäß Formelsammlung

$$\begin{aligned}W_1 &= \frac{1}{2}L_{aa}\,I_a^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{l}\,n^2\,\pi\frac{d_a^2}{4}\,I_0^2\,\sin(\omega_0 t).\end{aligned}$$

c) Die Selbstinduktivität der äußeren Spule wird analog zur inneren Spule berechnet:

$$L_{bb} = \frac{n\Phi_{bb}}{I_b} = \mu_0 \, \frac{n^2}{l} \, \pi \frac{d_b^2}{4}$$

Bei der Berechnung der Gegeninduktivitäten muss der Querschnitt der **inneren** Spule $A_a = \pi \frac{d_a^2}{4}$ berücksichtigt werden:

$$\Phi_{ab} = \mu_0 H_a A_a = \mu_0 \frac{nI_a}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$$
$$\Rightarrow L_{ab} = \frac{n\Phi_{ab}}{I_a} = \mu_0 \frac{n^2}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$$

und

$$\Phi_{ba} = \mu_0 H_b A_a = \mu_0 \frac{nI_b}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$$
$$\Rightarrow L_{ba} = \frac{n\Phi_{ba}}{I_b} = \mu_0 \frac{n^2}{l} \pi \frac{d_a^2}{4} = L_{ab}.$$

d) Ableiten der Gleichungen für Φ_a und Φ_b nach der Zeit, Anwenden von Formel $U_{ind,ik} = -N_k \frac{d\Phi_{m,ik}}{dt}$ aus der Formelsammlung und Division durch die Windungszahlen führt zu

$$U_a = -L_{aa}\dot{I}_a - L_{ab}\dot{I}_b$$
$$U_b = -L_{ab}\dot{I}_a - L_{bb}\dot{I}_b = 0.$$

Die Ergebnisse von Aufgabenteil c) werden so umgeschrieben, dass alle Induktionskoeffizienten mit Hilfe von L_{aa} ausgedrückt werden:

- $L_{aa} = L_{ba} = L_{ab} = \mu_0 \frac{n^2}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$
- $L_{bb} = \frac{d_b^2}{d_a^2} L_{aa}$.

(Dies ist für die gegebene Anordnung so möglich, weil die Spulen die gleiche Windungszahl n haben.)

Die Gleichung für U_b wird umgeformt zu $\dot{I}_b = -\frac{L_{aa}}{L_{bb}} \, \dot{I}_a = -\frac{d_a^2}{d_b^2} \dot{I}_a$.

Aus dem gegebenen I_a folgt durch Ableiten $\dot{I}_a = I_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

Eingesetzt folgt insgesamt $\dot{I}_b = -\frac{d_a^2}{d_b^2} I_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$. Integration liefert den gesuchten Strom

$$I_b = -\frac{d_a^2}{d_b^2} I_0 \sin(\omega_0 t) + 0.$$

Die Integrationskonstante ist 0, da I_b keinen Gleichanteil besitzt (siehe Aufgabentext).

e) Gemäß Formelsammlung ist die Energie des Magnetfelds der zwei Spulen

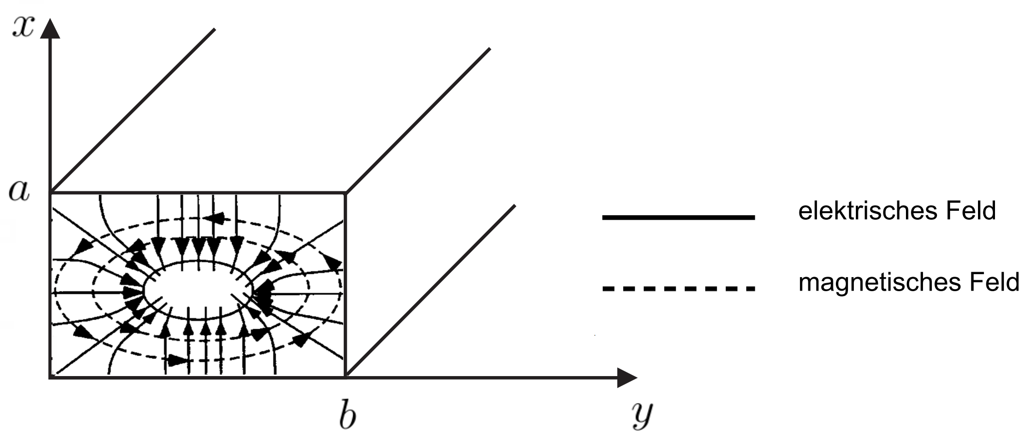
$$\begin{aligned}
W_2 &= \frac{1}{2} L_{aa} I_a^2 + L_{ab} I_a I_b + \frac{1}{2} L_{bb} I_b^2 \\
&\overset{\text{c)}}{=} \frac{1}{2} L_{aa} I_a^2 + L_{aa} I_a I_b + \frac{1}{2} \frac{d_b^2}{d_a^2} L_{aa} I_b^2 \\
&= L_{aa} I_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \left[\frac{1}{2} - \frac{d_a^2}{d_b^2} + \frac{1}{2} \frac{d_b^2}{d_a^2} \left(-\frac{d_a^2}{d_b^2} \right)^2 \right] \\
&= L_{aa} I_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \frac{d_b^2 - d_a^2}{2 d_b^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 n^2}{l} I_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \frac{d_a^2}{d_b^2} \left(d_b^2 - d_a^2 \right) .
\end{aligned}$$

Für den Spezialfall $d_a = d_b$ wird $W_2 = 0$, d.h. es ist keine Energie mehr im Magnetfeld gespeichert.

Dies kommt daher, dass beide Spulen den genau gleichen Raum umschließen. Jede infinitesimal kleine Änderung des Stroms I_a und ein dadurch entstehendes Magnetfeld ruft durch die induktive Kopplung sofort einen entgegengesetzten Strom I_b hervor, dessen Magnetfeld das erste Magnetfeld im gesamten Raum vollständig auslöscht. Dadurch ist die resultierende magnetische Feldenergie gleich 0.

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei ein rechteckiger Hohlleiter mit den Kantenlängen a und b. Die Hohlleiterwände werden als ideal leitend angenommen.



Hinweis:

$$H_x = -\frac{1}{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$
$$H_y = -\frac{1}{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$
$$E_x = -\frac{1}{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$
$$E_y = -\frac{1}{\omega^2\,\mu\,\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

a) Welcher Wellentyp (TE- oder TM-Welle) gehört zum gegebenen Feldlinienbild? Begründen Sie.

Betrachten Sie ab jetzt den Fall einer sich in z-Richtung des Hohlleiters ausbreitenden TE_{mn}-Welle.

b) Welche der Funktionen $H_z = H_0\,\cos(\frac{m\,\pi}{a}\,x)\,\cos(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)}$ oder $H_z = H_0\,\sin(\frac{m\,\pi}{a}\,x)\,\sin(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)}$ erfüllt die Grenzflächenbedingungen für das E-Feld? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

c) Leiten Sie die Wellenzahl k_z aus der Wellengleichung der tangentialen Feldkomponente her.

d) Berechnen Sie die notwendige Breite des Hohlleiters in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ, sodass sich nur Wellen des TE_{01}-Modes ausbreiten können.
Hinweis: $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

e) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der geometrischen Abmessungen und der Frequenz, mit der die Welle aus Aufgabe d) Energie im Hohlleiter überträgt. Begründen Sie Ihr Vorgehen.
Hinweis: Gruppengeschwindigkeit $v_{gr,mn} = \frac{\partial\omega}{\partial k_{zmn}}$ und Phasengeschwindigkeit $c_{mn} = \frac{\omega}{k_{zmn}}$

Lösung 4 (16 Punkte)

a) Das H- Feld kann so wie es eingezeichnet ist nicht in z-Richtung weisen. Daraus folgt $H_z = 0$. Damit ist die Bedingung für eine TM-Welle erfüllt.

b) Durch die unteren beiden Gleichungen des Hinweises können Bedingungen für $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ und $\frac{\partial H_z}{\partial y}$ gefunden werden. Die Komponente E_z ist immer Null, da es sich um TE-Wellen handelt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_z(0,y,z)}{\partial x} &= \frac{\partial H_z(a,y,z)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial H_z(x,0,z)}{\partial y} &= \frac{\partial H_z(x,b,z)}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

Die vorgegebene Funktion wird für H_z nach x bzw. y abgeleitet und mit der Grenzflächenbedingung verglichen.

$$\begin{aligned}
H_z &= H_0 \sin(\frac{m\,\pi}{a}\,x)\,\sin(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)} \\
\frac{\partial H_z}{\partial x} &= H_0\,\frac{m\,\pi}{a}\,\cos(\frac{m\,\pi}{a}\,x)\,\sin(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)} \\
\frac{\partial H_z(0,y,z)}{\partial x} &= H_0\,\frac{m\,\pi}{a}\,\sin(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)} \neq 0
\end{aligned}$$

Diese Funktion erfüllt die Grenzflächenbedingung für das E-Feld nicht. Die zweite Funktion wird ebenfalls auf Übereinstimmung mit der Grenzflächenbedingung überprüft.

$$\begin{aligned}
H_z &= H_0 \cos(\frac{m\,\pi}{a}\,x)\,\cos(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)} \\
\frac{\partial H_z}{\partial x} &= -H_0\,\frac{m\,\pi}{a}\,\sin(\frac{m\,\pi}{a}\,x)\,\cos(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)} \\
\frac{\partial H_z(0,y,z)}{\partial x} &= -H_0\,\frac{m\,\pi}{a}\,\underbrace{\sin(\frac{m\,\pi}{a}\,0)}_{=0}\,\cos(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)} = 0 \\
\frac{\partial H_z(a,y,z)}{\partial x} &= -H_0\,\frac{m\,\pi}{a}\,\underbrace{\sin(\frac{m\,\pi}{a}\,a)}_{=0}\,\cos(\frac{n\,\pi}{b}\,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)} = 0
\end{aligned}$$

Die zweite Funktion erfüllt die Bedingung $\frac{\partial H_z(0,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial H_z(a,y,z)}{\partial x} = 0$. Die Bedingung $\frac{\partial H_z(x,0,z)}{\partial y} = \frac{\partial H_z(x,b,z)}{\partial y} = 0$ kann analog durch Ableiten von H_z nach y überprüft werden.

c) Die Wellengleichung wird für die H_z-Komponente aufgestellt.

$$\Delta H_z - \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0$$

Durch Einsetzen von H_z und Auflösen kann k_z allgemein bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
- & \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_z^2 + \varepsilon\,\mu\,w^2 = 0 \\
k_z &= \sqrt{\varepsilon\,\mu\,\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}
\end{aligned}$$

e) Für $k_z = 0$:

$$0 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Für eine TE_{01}-Welle gilt: m= 0 und n= 1.

$$b = \frac{\lambda}{2}$$

d) Die Energie wird im Hohlleiter mit v_g übertragen:

$$v_{g01} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{\frac{\partial k}{\partial\omega}} = \frac{c_0^2 k}{\omega} = \frac{1}{\mu\varepsilon\omega}\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)

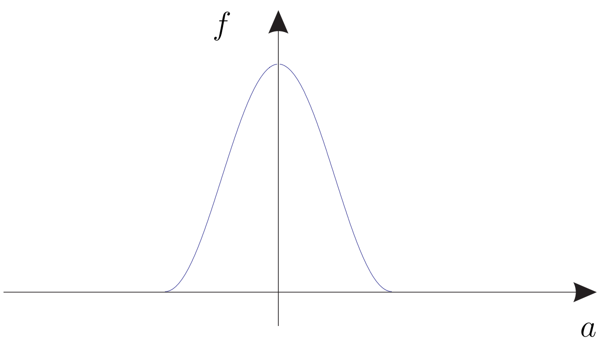
Eine ebene Pulswelle breitet sich in einem nichtleitenden, ladungsfreien Material aus. Gegeben ist ihr elektrisches Feld:

$$\vec{E} = E_0 f(\omega t - kz)\vec{e_x}$$

mit

$$f(a) = \begin{cases} cos^2(a) & -\frac{\pi}{2} \leq a < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Die Funktion f hat folgende Form:



a) Skizzieren Sie die x-Komponente des elektrischen Feldes zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und t_1 mit $t_1 > 0$ in einem gemeinsamen Schaubild über der z-Achse. Es gilt: $\omega > 0$ und $k > 0$.

b) Zeigen Sie, dass das $\vec{E}$-Feld die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

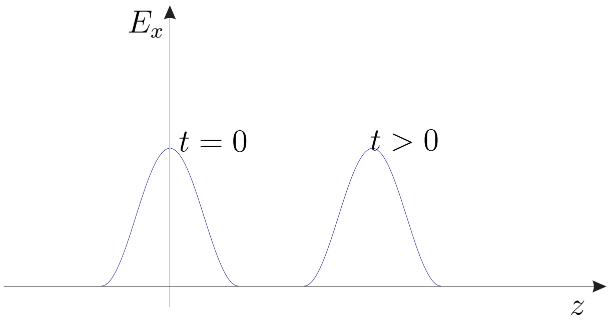
erfüllt, und berechnen Sie k als Funktion von ω.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen H_0 als Funktion von E_0 und bestätigen Sie, dass alle Maxwellgleichungen erfüllt sind.

d) Berechnen Sie den Poynting - Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Lösung 5 (16 Punkte)

a) Die Welle bewegt sich entlang der positiven z-Richtung und das E-Feld hat nur positive Werte:



b) Unter Berücksichtigung der Ketten- und Produktregel ergibt sich

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = E_0 \vec{e_x} \begin{cases} -2cos(\omega t - kz)sin(\omega t - kz)(-k) & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -2E_0 \vec{e_x} k^2 \begin{cases} cos^2(\omega t - kz) - sin^2(\omega t - kz) & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = E_0 \vec{e_x} \begin{cases} -2cos(\omega t - kz)sin(\omega t - kz)\omega & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -2E_0 \vec{e_x} \omega^2 \begin{cases} cos^2(\omega t - kz) - sin^2(\omega t - kz) & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Einsetzen in die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \ \vec{E}}{\partial \ z^2} \ = \ \varepsilon \ \mu \ \frac{\partial^2 \ \vec{E}}{\partial \ t^2}$$

ergibt

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$
$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

c) H_0 wird anhand der Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{B}$ ermittelt.

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{e_y} E_0 \begin{cases} -2cos(\omega t - kz)sin(\omega t - kz)(-k) & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Mit dem Ansatz $\vec{H} = H_0 f(\omega t - kz)\vec{e_y}$ folgt

$$\dot{B} = \mu\dot{H} = \mu H_0 \begin{cases} -2cos(\omega t - kz)sin(\omega t - kz)\omega & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Einsetzen in die Maxwellgleichung liefert

$$H_0 = E_0 \frac{k}{\mu\omega} = E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= -\vec{e_x}\frac{\partial H_y}{\partial z} \\ &= -\vec{e_x}H_0 \begin{cases} -2cos(\omega t - kz)sin(\omega t - kz)(-k) & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases} \\ &= \dot{\vec{D}} \\ &= \varepsilon E_0 \vec{e_x} \begin{cases} -2cos(\omega t - kz)sin(\omega t - kz)\omega & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist mit H_0 und k von oben erfüllt.

Die weiteren Maxwellgleichungen sind wegen $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ erfüllt:

$$\begin{aligned} div\vec{D} &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ div\vec{B} &= \mu \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

d) Es gilt $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{S} = \vec{e_z}E_0^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \begin{cases} cos^4(\omega t - kz) & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kz < \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$