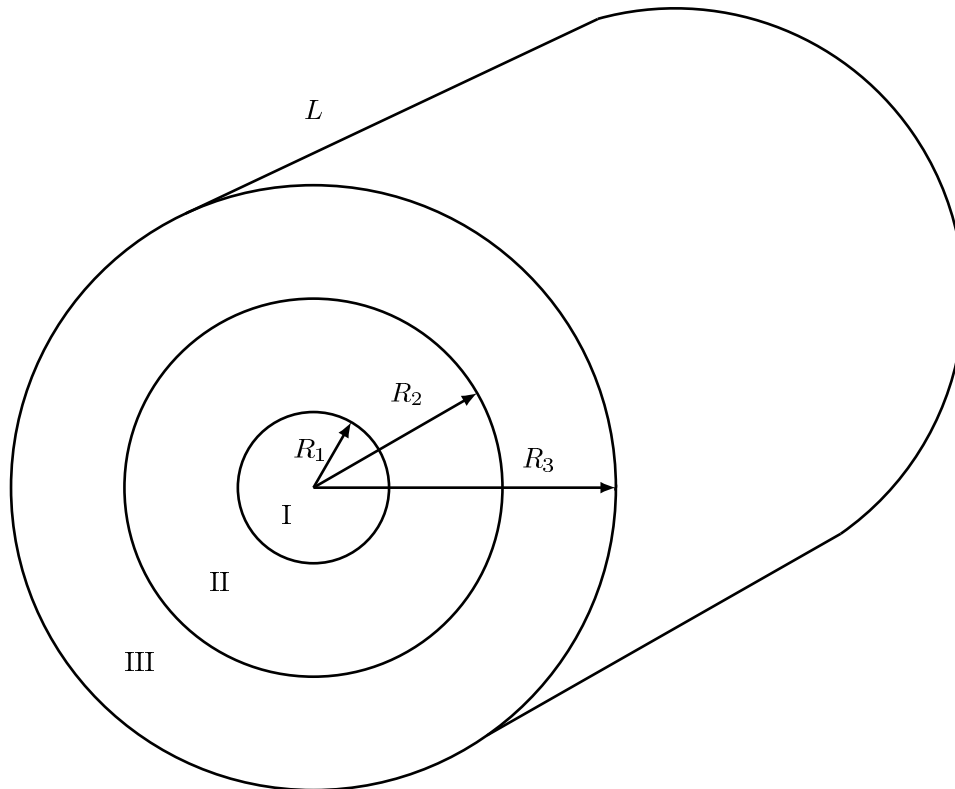


Aufgabe 1 (16 Punkte)

**Kennwerte des Zylinders:**

Gegeben sei der oben nicht maßstabsgetreu dargestellte Zylinder der Länge L . Er besteht aus einer massiven Elektrode im Inneren und einer unendlich dünnen Elektrode außen. Die innere Elektrode liegt auf dem Potential $\Phi(R_1) = \Phi_0$ und ist ideal leitfähig. Die äußere Elektrode liegt auf dem Potential $\Phi(R_3) = 0$, das Potential im Unendlichen ist ebenfalls $\Phi(\infty) = 0$. Auf der äußeren Elektrode befindet sich die Ladung Q_a , auf der inneren die Ladung Q_i . Zwischen den beiden Elektroden befindet sich ein Dielektrikum und eine Schicht konstanter Ladungsdichte. Randeffekte können vernachlässigt werden. Die relevanten Kennwerte der einzelnen Bereiche sind in der Tabelle gegeben.

Bereich	Radius	κ	ε_r	ϱ
I ($0 \leq R < R_1$)	R_1	∞		
II ($R_1 \leq R < R_2$)	$R_2 = 5 R_1$	0	$\varepsilon_2 = 1$	ϱ_0
III ($R_2 \leq R < R_3$)	$R_3 = 10 R_1$	0	$\varepsilon_3 = 3$	0
$R = R_3$		∞		

- Berechnen Sie das elektrische Feld \vec{E} im Bereich $0 \leq R < R_3$.
- Berechnen Sie das elektrische Potential Φ aus dem elektrischen Feld \vec{E} in Abhängigkeit von Q_i im Bereich $0 \leq R < R_3$.
- Skizzieren Sie den Verlauf des elektrischen Feldes \vec{E} und des elektrischen Potentials Φ über den Radius R . Verwenden Sie für die Raumladungsdichte folgenden Zusammenhang: $\varrho_0 = -\frac{Q_i}{\pi L R_1^2}$.
- Berechnen Sie die Raumladungsdichte ϱ_0 in Abhängigkeit von den Ladungen Q_a und Q_i .

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Berechnung des elektrischen Feldes \vec{E}

Zunächst einige allgemeine Überlegungen:

Das Oberflächenintegral über den Durchfluss entspricht dem Volumenintegral über der Raumladungsdichte:

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int \rho dv. \quad (1)$$

Der Durchfluss und das elektrische Feld sind in linearen und isotropen Materialien folgendermaßen miteinander verknüpft:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (2)$$

Für den Fall des Zylinders (keine Randeffekte, symmetrischer Aufbau) werden Zylinderkoordinaten in radialer Richtung betrachtet:

$$\vec{D} = D_R \vec{e}_r, \quad (3)$$

das Oberflächenintegral vereinfacht sich dadurch zu

$$2\pi L R D_r = \int \rho dv. \quad (4)$$

Für den Bereich I ($R < R_1$) gilt aufgrund der idealen Leitfähigkeit $\kappa = \infty$:

$$D_R = 0 \Rightarrow E_R = 0. \quad (5)$$

Für den Bereich II ($R_1 \leq R < R_2$) ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (4):

$$\begin{aligned} 2\pi L R D_R &= Q_i + \int \rho dv \\ &= Q_i + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^R \rho_0 R' dR' d\varphi dz \\ &= Q_i + 2\pi L \rho_0 \left[\frac{R'^2}{2} \right]_{R_1}^R \\ D_R &= \frac{Q_i}{2\pi L R} + \frac{\rho_0}{2} R - \frac{\rho_0}{2} \frac{R_1^2}{R} \\ \Rightarrow E_R &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} \left(\frac{Q_i}{2\pi L R} + \frac{\rho_0}{2} R - \frac{\rho_0}{2} \frac{R_1^2}{R} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Einsetzen der Tabellenwerte liefert:

$$\begin{aligned} D_R &= \frac{Q_i}{2\pi L R} + \frac{\rho_0}{2} R - \frac{\rho_0}{2} \frac{R_1^2}{R} \\ \Rightarrow E_R &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{Q_i}{2\pi L R} + \frac{\rho_0}{2} R - \frac{\rho_0}{2} \frac{R_1^2}{R} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Für den Bereich III ($R_2 \leq R < R_3$) gilt:

$$\begin{aligned}
 2\pi L R D_R &= Q_i + \int \rho \, dv \quad (\rho = 0) \\
 &= Q_i + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho \, dv \\
 &= Q_i + \pi \rho_0 L (R_2^2 - R_1^2) \\
 D_R &= \frac{Q_i}{2\pi L R} + \frac{\rho_0}{2R} (R_2^2 - R_1^2) \\
 \Rightarrow E_R &= \frac{Q_i}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_3 L R} + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon_3 R} (R_2^2 - R_1^2).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Die Verwendung der Tabellenwerte führt auf:

$$\begin{aligned}
 D_R &= \frac{Q_i}{2\pi L R} + 12 \rho_0 \frac{R_1^2}{R} \\
 \Rightarrow E_R &= \frac{Q_i}{6\pi \varepsilon_0 L R} + 4 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 R} R_1^2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

b) Berechnung des elektrischen Potentials Φ

Es gilt allgemein:

$$\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \, d\vec{s}. \tag{10}$$

Im vorliegenden Fall gilt für $R_3 \leq R$: $\Phi(R) = 0$. Damit kann das Potential von außen nach innen berechnet werden.

Für Bereich III ($R_2 \leq R < R_3$) ergibt sich mit obiger Überlegung:

$$\begin{aligned}
 \Phi(R) - \underbrace{\Phi(R_3)}_{=0} &= \Phi(R) = - \int_{R_3}^R E_R \, dR' \\
 &= - \left(\frac{Q_i}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_3 L} + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon_3} (R_2^2 - R_1^2) \right) \int_{R_3}^R \frac{1}{R'} \, dR' \\
 &= - \left(\frac{Q_i}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_3 L} + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon_3} (R_2^2 - R_1^2) \right) [\ln(R')]_{R_3}^R,
 \end{aligned} \tag{11}$$

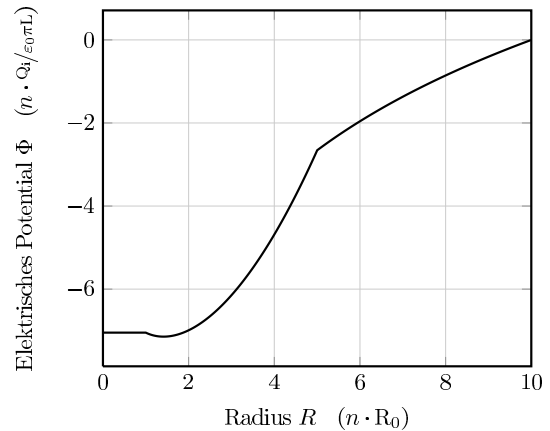
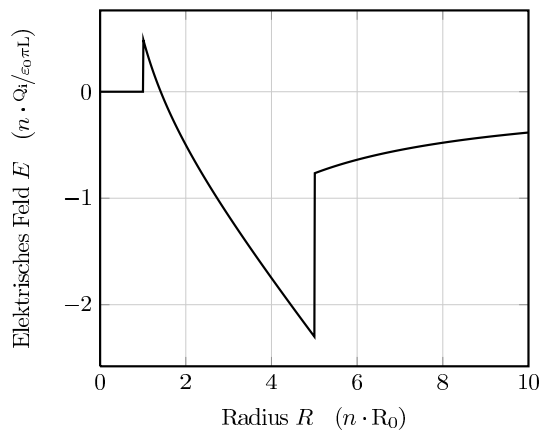
nach dem Einsetzen von R_2 als untere Grenze und ε_3 folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 \Phi(R_2) &= \left(\frac{Q_i}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_3 L} + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon_3} (R_2^2 - R_1^2) \right) \ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right) \\
 &= \left(\frac{Q_i}{6\pi \varepsilon_0 L} + 4 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} R_1^2 \right) \ln(2).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Für den Bereich II ($R_1 \leq R < R_2$) berechnet sich das Potential folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \Phi(R) - \underbrace{\Phi(R_2)}_{\text{bekannt aus (12)}} &= - \int_{R_2}^R E_R dR' \\
 &= - \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_2} \int_{R_2}^R \frac{Q_i}{2\pi L R'} + \frac{\rho_0}{2} R' - \frac{\rho_0 R_1^2}{2 R'} dR' \\
 &= - \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_2} \left[\frac{Q_i}{2\pi L} \ln(R') + \frac{\rho_0}{4} R'^2 - \frac{\rho_0 R_1^2}{2} \ln(R') \right]_{R_2}^R
 \end{aligned} \tag{13}$$

c) Verlauf von elektrischem Feld \vec{E} und Potential Φ , abhängig von $\frac{Q_i}{\epsilon_0 \pi L}$



d) Berechnung der Ladungsdichte ρ_0

Unter der Annahme $E_R = 0$ für $R_3 \leq R$ laut Aufgabe ergibt sich für die Gesamtladung:

$$Q_{\text{ges}} = Q_a + Q_i + Q_v = 0 \tag{14}$$

Nach Gleichung (6) ergibt sich für die Volumenladung

$$\begin{aligned}
 Q_v &= 2\pi L \rho_0 \left[\frac{R'^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} \\
 &= \pi L \rho_0 (R_2^2 - R_1^2) = 24 L R_1^2 \pi \rho_0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Die Ladungsdichte ρ_0 ergibt sich damit zu:

$$\rho_0 = - \frac{Q_a + Q_i}{24\pi L R_1^2}. \tag{16}$$

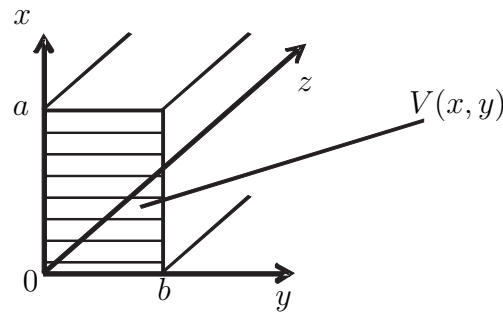
Aufgabe 2 (16 Punkte)

Abbildung 1: Rechteckiger Hohlleiter

Gegeben ist ein in positiver z -Richtung unendlich ausgedehnter Hohlkörper mit rechteckigem Querschnitt (keine z -Abhängigkeit). Für das Potential Φ gilt:

$$\Phi(0, y, 0) = 0 \mid 0 \leq y \leq b$$

$$\Phi(a, y, 0) = V_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \mid 0 \leq y \leq b$$

$$\Phi(x, 0, 0) = \Phi(x, b, 0) = 0 \mid 0 \leq x \leq a$$

Hinweis: Das Potential besitzt in den folgenden Aufgabenteilen keine Abhängigkeit in z -Richtung.

- Separieren Sie die Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ des Potentials $\Phi(x, y)$ bei $z = 0$ mit dem Produktansatz $\Phi(x, y) = \Phi_x(x) \cdot \Phi_y(y)$ in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Achten Sie dabei auf eine geschickte Wahl des Vorzeichens der Konstanten $\pm k^2$ (mit Begründung).
- Berechnen Sie das Potential $\Phi(x, y)$ aus den Lösungen der zwei Differentialgleichungen und den vorgegebenen Randbedingungen. Bestimmen Sie nach Möglichkeit alle freien Parameter.
- Berechnen Sie das elektrische Feld \vec{E} aus dem Potential $\Phi(x, y)$ aus Aufgabenteil b)

Die Anordnung in Abbildung 1 wird nun so verändert, dass das Potential auf den Rändern 0 beträgt:

$$\Phi(0, y, z) = \Phi(a, y, z) = 0 \mid 0 \leq y \leq b$$

$$\Phi(x, 0, z) = \Phi(x, b, z) = 0 \mid 0 \leq x \leq a$$

In der Ebene $z = 0$ sei das Potential über dem Querschnitt vorgegeben:

$$\Phi(x, y, 0) = V(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b$$

Gesucht ist eine Lösung, für die das Potential für $z \rightarrow \infty$ verschwindet, d.h.:

$$\Phi(x, y, z \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \mid 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq a$$

Beachten Sie die Fortsetzung auf der folgenden Seite!

Hinweis: Das Potential besitzt in den folgenden Aufgabenteilen eine Abhängigkeit in z -Richtung.

- d) Separieren Sie die Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ des Potentials $\Phi(x, y, z)$ mit dem Produktansatz $\Phi(x, y, z) = \Phi_x(x) \cdot \Phi_y(y) \cdot \Phi_z(z)$ (mit Rechnung). Achten Sie dabei auf eine geschickte Wahl des Vorzeichens der Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ (mit Begründung).
- e) Geben Sie die Funktionen $\Phi_x(x), \Phi_y(y), \Phi_z(z)$ inklusive aller freien Parameter an, die sich aus der Wahl der Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ ergeben.
- f) Bestimmen Sie nach Möglichkeit alle freien Parameter des Lösungsansatzes der Differentialgleichung anhand der gegebenen Randbedingungen. Für die Erfüllung einer beliebigen Randbedingung $V(x, y)$ bei $z = 0$ ist ein Reihenansatz aus der Überlagerung aller allgemeinen Lösungen notwendig. Geben Sie diesen Reihenansatz für $\Phi(x, y, z)$ an.

Hinweis: $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$

Lösung 2 (16 Punkte)

a)

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

daraus Folgt:

$$\Phi(x, y) = \Phi_x(x) \cdot \Phi_y(y) \Rightarrow$$

$$\Phi_y(y) \frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2} + \Phi_x(x) \frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Phi_x(x)} \frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2}}_{=konst} + \underbrace{\frac{1}{\Phi_y(y)} \frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2}}_{=konst} = 0$$

Die Konstanten k werden entsprechend den Randbedingungen gewählt (Vgl. obere- und rechte Randbedingung).

$$\frac{1}{\Phi_x(x)} \frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2} = k^2$$

$$\frac{1}{\Phi_y(y)} \frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2} = -k^2$$

b)

$$\Phi_x(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

$$\Phi_y(y) = C\sin(ky) + D\cos(ky)$$

Aus $\Phi(x=0, y) = 0$ folgt

$$B = -A$$

Aus $\Phi(x, y=0) = 0$ folgt

$$D = 0$$

Aus $\Phi(x=a, y) = V_0\sin(\frac{\pi}{b}y)$ folgt

$$k = \frac{\pi}{b}$$

Damit vereinfacht sich das Potential $\Phi(x, y)$ zu

$$\Phi(x, y) = AC \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) (e^{\frac{\pi}{b}x} - e^{-\frac{\pi}{b}x})$$

Damit $\Phi(x = a, y) = V_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$ gilt ergibt sich AC durch Koeffizientenvergleich zu

$$\begin{aligned} AC \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) (e^{\frac{\pi}{b}a} - e^{-\frac{\pi}{b}a}) &= V_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \\ AC &= \frac{V_0}{(e^{\frac{\pi}{b}a} - e^{-\frac{\pi}{b}a})} \end{aligned}$$

Die Potentialfunktion $\Phi(x, y)$ ergibt sich dadurch zu

$$\Phi(x, y) = \frac{V_0}{(e^{\frac{\pi}{b}a} - e^{-\frac{\pi}{b}a})} \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) (e^{\frac{\pi}{b}x} - e^{-\frac{\pi}{b}x})$$

c) Das elektrische Feld \vec{E} ergibt sich zu:

$$\vec{E} = -\text{grad}(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = -V_0 \frac{\pi}{b(e^{\frac{\pi}{b}a} - e^{-\frac{\pi}{b}a})} \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) (e^{\frac{\pi}{b}x} + e^{-\frac{\pi}{b}x}) \vec{e}_x$$

$$-V_0 \frac{\pi}{b(e^{a^2} - e^{-a^2})} \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) (e^{\frac{\pi}{b}x} - e^{-\frac{\pi}{b}x}) \vec{e}_y$$

d)

$$\Delta\Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (17)$$

Produktansatz: $\Phi(x, y, z) = \Phi_x(x) \cdot \Phi_y(y) \cdot \Phi_z(z)$

$$\Rightarrow \Delta\Phi(x, y, z) = \Phi_y(y)\Phi_z(z) \frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2} + \Phi_x(x)\Phi_z(z) \frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2} + \Phi_x(x)\Phi_y(y) \frac{\partial^2\Phi_z(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (18)$$

$$\Delta\Phi(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{\Phi_x(x)} \frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2}}_{\text{konst}} + \underbrace{\frac{1}{\Phi_y(y)} \frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2}}_{\text{konst}} + \underbrace{\frac{1}{\Phi_z(z)} \frac{\partial^2\Phi_z(z)}{\partial z^2}}_{\text{konst}} = 0 \quad (19)$$

Die Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ werden anhand der Randbedingungen gewählt. Damit das Potential auf dem Rand Null wird werden die Konstanten für die x - und y -Abhängigkeit wie folgt gewählt:

$$\frac{1}{\Phi_x(x)} \frac{\partial^2 \Phi_x(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 \quad (20)$$

$$\frac{1}{\Phi_y(y)} \frac{\partial^2 \Phi_y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 \quad (21)$$

Der daraus resultierende Sinus-Term in $\Phi_x(x)$ und $\Phi_y(y)$ genügt der Randbedingung bei $x = 0$ und $y = 0$. Damit für $z \rightarrow \infty$ das Potential verschwindet wird ein Ansatz mit einer e -Funktion benötigt. Die Konstante k_z wird daher gewählt zu:

$$\frac{1}{\Phi_z(z)} \frac{\partial^2 \Phi_z(z)}{\partial z^2} = +k_z^2 \quad (22)$$

e) Daraus folgen die allgemeinen Gleichungen für $\Phi_x(x), \Phi_y(y), \Phi_z(z)$:

$$\Phi_x(x) = a_x \cos(k_x x) + b_x \sin(k_x x) \quad (23)$$

$$\Phi_y(y) = a_y \cos(k_y y) + b_y \sin(k_y y) \quad (24)$$

$$\Phi_z(z) = a_z e^{k_z z} + b_z e^{-k_z z} \quad (25)$$

f) Damit die Randbedingungen bei $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt sind muss $a_x = 0$ und $a_y = 0$ gelten. Das Potential verschwindet für $z \rightarrow \infty$ wenn $a_z = 0$ gilt.

$$\Phi(x, y, z) = b_x \sin(k_x x) \cdot b_y \sin(k_y y) \cdot b_z e^{-k_z z} \quad (26)$$

$$= B \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot e^{-k_z z} \quad (27)$$

Aus $\Phi(a, y, z) = \Phi(x, b, z) = 0$ folgt für k_x und k_y :

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad |n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \quad |m = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Aus $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ folgt:

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (30)$$

eingesetzt ergibt dies:

$$\Phi(x, y, z) = B \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}z} \quad (31)$$

Der allgemeine Reihenansatz lautet damit:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}z} \quad (32)$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben sei eine in der x - y -Ebene liegende dünne Leiterschleife mit dem Radius a , siehe Abbildung 2. Die dargestellte Leiterschleife dreht sich in einem konstanten, homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die x -Achse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ steht die Leiterschleife orthogonal zum Magnetfeld $B_0 \vec{e}_z$.

- a) Berechnen Sie die in die Leiterschleife induzierte Spannung U_{ind} in Abhängigkeit der Zeit t .

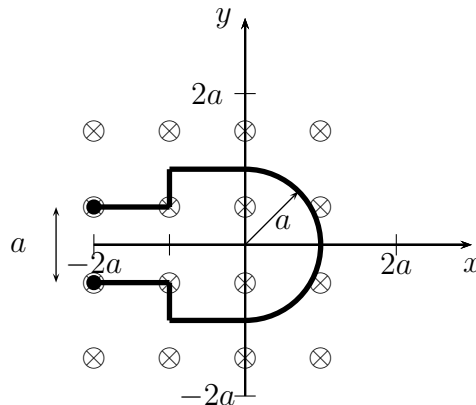


Abbildung 2: Leiterschleife im homogenen Magnetfeld.

Im Folgenden seien zwei unendlich lange Linienleiter in Form von Leiterschleifen gegeben, siehe Abbildung 3. Dabei liegen beide Leiter fest in der x - y -Ebene. Die innere Leiterschleife wird von dem Gleichstrom I durchflossen, die Äußere von dem Gleichstrom $I/2$ in entgegengesetzter Richtung.

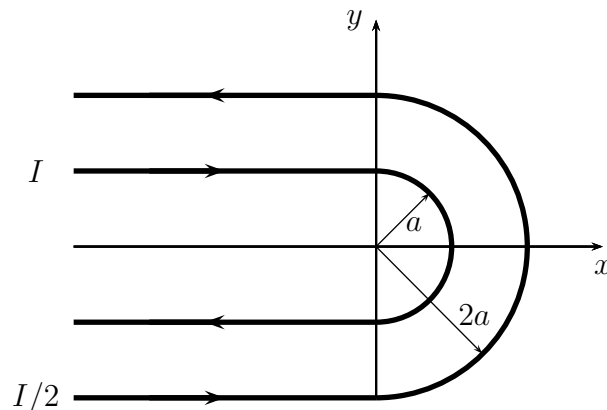


Abbildung 3: Zwei unendlich lange Linienleiter, die von unterschiedlichen Strömen entgegengesetzter Richtung durchflossen werden.

- b) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im Ursprung des Koordinatensystems unter Verwendung des Gesetzes von Biot-Savart für Linienleiter. Zerlegen Sie hierbei die zu lösenden Integrale in geeignete Abschnitte und nutzen Sie die unten angegebenen Hinweise.

Hinweise:

- Im Aufgabenteil (b) wirkt kein äußeres Magnetfeld.

- $$\int \frac{1}{(x^2 + c)^{3/2}} dx = \frac{x}{c\sqrt{x^2 + c}}$$

- c) In Abbildung 3 wird weiterhin die äußere Leiterschleife von dem Strom $I/2$ in mathematisch positiver Richtung durchflossen. Wie muss Betrag und Richtung des Stroms für den inneren Leiter in Abbildung 3 gewählt werden, damit sich das magnetische Feld im Ursprung aufhebt?

Lösung 3 (16 Punkte)

- a) Die Leiterschleife dreht sich in einem homogenen Magnetfeld mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Daher ändert sich die Fläche der Leiterschleife, die vom Magnetfeld durchflutet wird in Abhängigkeit der Zeit t :

$$A(t) = \cos(\omega t)A$$

Um die induzierte Spannung U_{ind} berechnen zu können, muss zu Beginn der magnetische Fluss berechnet werden:

$$\Phi_m = \iint_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\Phi_m = B_0 \cdot A(t)$$

$$\Phi_m = B_0 \cdot \cos(\omega t) \left(3a^2 + \frac{1}{2}a^2\pi \right)$$

Die Induktionsspannung U_{ind} ergibt sich nun aus dem Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$U_{\text{ind}} = B_0 \cdot \omega \sin(\omega t) a^2 \left(3 + \frac{1}{2}\pi \right)$$

- b) Das Gesetz von Biot-Savart für dünne Leiter lautet:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_S \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Da die magnetische Flussdichte im Koordinatenursprung berechnet werden muss, gilt:

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_S \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r}')}{|\vec{r}'|^3}$$

Das Wegintegral ist in drei Abschnitte zu zerlegen:

$$\vec{B} = \vec{B}_{LS_1} + \vec{B}_{LS_2} = \underbrace{\int_{S_1} d\vec{B}_1 + \int_{S_2} d\vec{B}_2 + \int_{S_3} d\vec{B}_3}_{\vec{B}_{LS_1}} + \underbrace{\int_{S_4} d\vec{B}_4 + \int_{S_5} d\vec{B}_5 + \int_{S_6} d\vec{B}_6}_{\vec{B}_{LS_2}}$$

Berechnung von \vec{B}_1 (innere Leiterschleife):

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ a \\ 0 \end{pmatrix}}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \, dx \end{pmatrix}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{\mu I}{4\pi} \vec{e}_z \left[\frac{x}{a\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{x \rightarrow -\infty}^0 = -\frac{\mu I}{4\pi a} \vec{e}_z$$

Berechnung von \vec{B}_2 (innere Leiterschleife):

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\vec{e}_\varphi \cdot a \, d\varphi \times a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}{a^3} \quad \left| \quad \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y \right.$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{a \, d\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}{a^3}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a^2 \, d\varphi \end{pmatrix}}{a^3} = -\frac{\mu I}{4a} \vec{e}_z$$

Berechnung von \vec{B}_3 (innere Leiterschleife):

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{-\infty} \frac{\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{-\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a dx \end{pmatrix}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu I}{4\pi} \vec{e}_z \left[\frac{x}{a\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_0^{x \rightarrow -\infty} = -\frac{\mu I}{4\pi a} \vec{e}_z$$

Berechnung von \vec{B}_4 (äußere Leiterschleife):

$$\vec{B}_4 = -\frac{\mu I}{8\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix}}{(x^2 + (2a)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_4 = -\frac{\mu I}{8\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2a dx \end{pmatrix}}{(x^2 + (2a)^2)^{3/2}} = \frac{\mu I}{8\pi} \vec{e}_z \left[\frac{x}{2a\sqrt{x^2 + (2a)^2}} \right]_{x \rightarrow -\infty}^0 = \frac{\mu I}{16\pi a} \vec{e}_z$$

Berechnung von \vec{B}_5 (äußere Leiterschleife):

$$\vec{B}_5 = -\frac{\mu I}{8\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\vec{e}_\varphi \cdot 2a d\varphi \times 2a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}{(2a)^3} \quad \left| \quad \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y \right.$$

$$\vec{B}_5 = -\frac{\mu I}{8\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2a d\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times 2a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}{(2a)^3}$$

$$\vec{B}_5 = -\frac{\mu I}{8\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(2a)^2 d\varphi \end{pmatrix}}{(2a)^3} = \frac{\mu I}{16a} \vec{e}_z$$

Berechnung von \vec{B}_6 (äußere Leiterschleife):

$$\vec{B}_6 = -\frac{\mu I}{8\pi} \int_0^{-\infty} \frac{\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}}{(x^2 + (2a)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_6 = -\frac{\mu I}{8\pi} \int_0^{-\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \, dx \end{pmatrix}}{(x^2 + (2a)^2)^{3/2}} = -\frac{\mu I}{8\pi} \vec{e}_z \left[\frac{x}{2a\sqrt{x^2 + (2a)^2}} \right]_0^{x \rightarrow -\infty} = \frac{\mu I}{16\pi a} \vec{e}_z$$

Damit ergibt sich die gesamte magnetische Flussdichte \vec{B} :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 + \vec{B}_5 + \vec{B}_6 = -\left(\frac{3\mu I}{8\pi a} + \frac{3\mu I}{16a} \right) \vec{e}_z$$

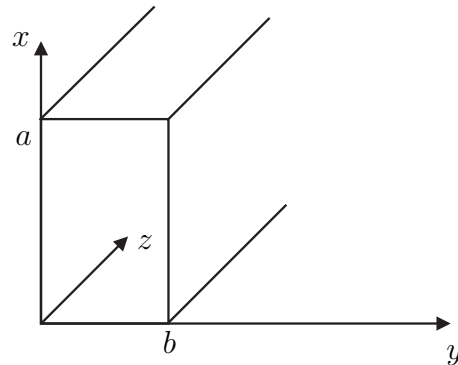
Der Zusammenhang zwischen der magnetische Flussdichte \vec{B} und der magnetischen Feldstärke \vec{H} lautet:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = -\left(\frac{3I}{8\pi a} + \frac{3I}{16a} \right) \vec{e}_z$$

- c) Die innere Leiterschleife muss mit dem Strom $I/4$ in mathematisch negativer Richtung durchflossen werden.

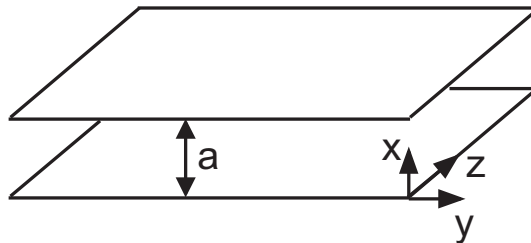
Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei ein rechteckiger Hohlleiter aus unendlich gut leitendem Metall mit den Kantenlängen a und $b = \frac{a}{2}$. Im Inneren des Hohlleiters breitet sich eine TE_{mn} Welle mit den Wellenzahlen $k_x(m)$ und $k_y(n)$ und der Frequenz $f = c \frac{1}{3b}$ aus.



- Leiten Sie die Wellenzahl k_z und die Grenzfrequenz f_{cmn} der Moden TE_{mn} in Abhängigkeit von m und n her.
Hinweis: $H_z = H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$.
- Ein Signal der Frequenz $f = c \frac{1}{3b}$ wird durch den Hohlleiter geschickt. Welcher der Moden TE_{01} , TE_{10} oder TE_{20} kann sich ausbreiten? Begründen Sie rechnerisch!
- Warum ist es in Leitern zur Signalübertragung gewünscht, dass sich nur ein Mode im Leiter ausbreiten kann? Begründen Sie!

Nun soll sich eine TM-Welle zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten im Abstand a ausbreiten. Zwischen den Platten befindet sich ein Vakuum.



Das E-Feld der Welle sei gegeben:

$$E_z = \sin(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (33)$$

$$E_x = -j \frac{k_z}{k_x} \cos(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (34)$$

$$E_y = 0 \quad (35)$$

- Welche Randbedingungen müssen für die Komponenten des elektrischen Feldes erfüllt sein?
- Berechnen Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen das B-Feld der TM-Welle.

Lösung 4 (16 Punkte)

- a) Die Wellengleichung wird für die H_z -Komponente aufgestellt.

$$\Delta H_z - \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0$$

Durch Einsetzen von H_z und Auflösen kann k_z allgemein bestimmt werden.

$$- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k_z^2 + \epsilon \mu \omega^2 = 0$$

$$k_z = \sqrt{\epsilon \mu \omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

An der Frequenz $f = f_{c_{mn}}$ ist die Wellenzahl $k_z = 0$. Nach Einsetzen der Wellenzahlen $k_x = \frac{m\pi}{a}$ und $k_y = \frac{n\pi}{b}$, die sich aus den Randbedingungen ergeben, und durch Auflösen der Gleichung nach f können die Grenzfrequenzen bestimmt werden.

$$0 = k_z = \sqrt{\omega_{c_{mn}}^2 \mu \epsilon - k_x^2 - k_y^2}$$

$$\omega_{c_{mn}}^2 \mu \epsilon = k_x^2 + k_y^2$$

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}$$

- b) Mit $f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}$ aus Aufgabenteil a) lauten die Grenzfrequenzen der einzelnen Moden:

$$f_{c_{10}} = c \frac{1}{4b}$$

$$f_{c_{20}} = c \frac{1}{2b}$$

$$f_{c_{01}} = c \frac{1}{2b}$$

Bei einer Ausbreitungsfrequenz von $f = c \frac{1}{3b}$ kann sich nur der TM_{10} Mode ausbreiten.

- c) Die unterschiedlichen Moden breiten sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus. Es kommt zu Dispersion, d.h. Die Signalimpulse verbreitern sich.
- d) Es gelten folgende Randbedingungen :

$$E_y(x=0, y, z) = E_y(a, y, z) = 0 \text{ und}$$

$$E_z(x=0, y, z) = E_z(a, y, z) = 0$$

- e)

$$E_z = \sin(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

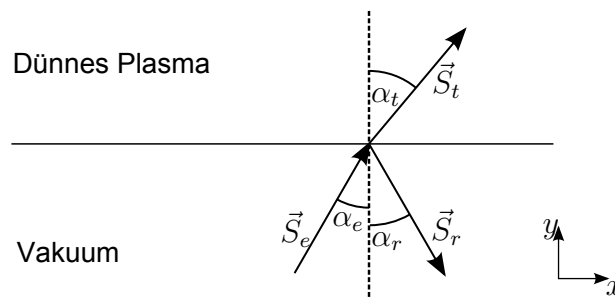
$$E_x = -j \frac{k_z}{k_x} \cos(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= -\vec{e}_y \cos(k_x x) k_x e^{j(\omega t - k_z z)} \\ &\quad - \vec{e}_y \frac{k_z}{k_x} \cos(k_x x) k_z e^{j(\omega t - k_z z)} \\ &= -\vec{e}_y \left(k_x + \frac{k_z^2}{k_x} \right) \cos(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)}\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \vec{e}_y \frac{j}{\omega} \left(k_x + \frac{k_z^2}{k_x} \right) \cos(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)



Eine ebene, linear polarisierte Welle im Vakuum trifft unter dem Einfallswinkel α_e bei $y = 0$ auf eine Grenzschicht zu einem dünnen Plasma.

Die Wellenzahl k lautet $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Die relative Dielektrizitätszahl im dünnen Plasma ist $\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}$. Hierbei sei ω_c , die Plasmakreisfrequenz, bekannt. ω ist die Kreisfrequenz der Welle. In beiden Raumbereichen gelte $\mu = \mu_0$.

Die elektrischen Felder der einfallenden Welle (\vec{E}_e), der reflektierten Welle (\vec{E}_r) und der transmittierten Welle (\vec{E}_t) haben die Form:

$$\vec{E}_e = E_e e^{j(\omega t - k_1(\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)y))} \vec{e}_z \quad (36)$$

$$\vec{E}_r = E_r e^{j(\omega t - k_1(\sin(\alpha_r)x - \cos(\alpha_r)y))} \vec{e}_z \quad (37)$$

$$\vec{E}_t = E_t e^{j(\omega t - k_2(\sin(\alpha_t)x + \cos(\alpha_t)y))} \vec{e}_z \quad (38)$$

- Berechnen Sie allgemein das magnetische Feld \vec{H} für eine Welle mit $\vec{E} = E e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \vec{e}_z$! Wählen Sie einen harmonischen Ansatz für \vec{H} ! Geben Sie k_x und k_y für die einfallende, reflektierte und transmittierte Welle an!
- Wie lauten die Grenzbedingungen für das elektrische und magnetische Feld \vec{E} und \vec{H} zum Zeitpunkt $t = 0$? Geben Sie diese Bedingungen konkret für die hier vorhandenen Felder an!
- Berechnen Sie die Winkel α_r und α_t der reflektierten und durchgelassenen Welle in Abhängigkeit des Einfallswinkels α_e !

Geben Sie den Winkel α_t für $\omega_c = \frac{1}{2}\omega$ in Abhängigkeit von α_e an!

- Berechnen Sie den Poynting-Vektor \vec{S}_t für die durchgelassene Welle
 - für $\omega_c > \omega$
 - für $\omega_c < \omega$!

In beiden Fällen sei ω so gewählt, dass sich ein reeler Wert für α_t ergibt.

In welchem Fall wird Wirkleistung durch das Plasma transportiert?

Hinweis: $(xy)^* = x^*y^*$

Lösung 5 (16 Punkte)

a)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (39)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot}(E e^{j(\omega t - (k_x x + k_y y))}) \vec{e}_z \quad (40)$$

$$= \vec{e}_x (E e^{j(\omega t - (k_x x + k_y y))} (-j k_y)) \quad (41)$$

$$+ \vec{e}_y (-E e^{j(\omega t - (k_x x + k_y y))} (-j k_x)) \quad (42)$$

$$= -\dot{\vec{B}} = -\mu \dot{\vec{H}} = -\mu j \omega \vec{H} \quad (43)$$

$$\vec{H} = E / (\mu \omega) e^{j(\omega t - (k_x x + k_y y))} \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Für die einfallende Welle gilt $k_x = k_1 \sin(\alpha_e)$ und $k_y = k_1 \cos(\alpha_e)$, für die reflektierte gilt $k_x = k_1 \sin(\alpha_r)$ und $k_y = -k_1 \cos(\alpha_r)$ und für die transmittierte schließlich $k_x = k_2 \sin(\alpha_t)$ und $k_y = k_2 \cos(\alpha_t)$.

b)

$$E_{tan1} = E_{tan2} \quad (45)$$

$$E_{e,z} + E_{r,z} = E_{t,z} \text{ für } y = 0 \quad (46)$$

$$E_e e^{j(\omega t - k_1(\sin(\alpha_e)x))} + E_r e^{j(\omega t - k_1(\sin(\alpha_r)x))} = E_t e^{j(\omega t - k_2(\sin(\alpha_t)x))} \quad (47)$$

$$E_e e^{j(-k_1(\sin(\alpha_e)x))} + E_r e^{j(-k_1(\sin(\alpha_r)x))} = E_t e^{j(-k_2(\sin(\alpha_t)x))} \quad (48)$$

und

$$H_{tan1} = H_{tan2} \quad (49)$$

$$H_{e,x} + H_{r,x} = H_{t,x} \text{ für } y = 0 \quad (50)$$

$$H_e e^{j(\omega t - k_1(\sin(\alpha_e)x))} + H_r e^{j(\omega t - k_1(\sin(\alpha_r)x))} = H_t e^{j(\omega t - k_2(\sin(\alpha_t)x))} \quad (51)$$

$$\frac{k_1 \cos \alpha_e E_e}{\mu \omega} e^{j(-k_1(\sin(\alpha_e)x))} + \frac{-k_1 \cos \alpha_r E_r}{\mu \omega} e^{j(-k_1(\sin(\alpha_r)x))} \quad (52)$$

$$= \frac{+k_2 \cos \alpha_t E_t}{\mu \omega} e^{j(-k_2(\sin(\alpha_t)x))} \quad (53)$$

c) Aus $E_{tan1} = E_{tan2}$ folgt: $k_1 \sin \alpha_e = k_1 \sin \alpha_r = k_2 \sin \alpha_t$. Damit ergibt sich

$$\alpha_e = \alpha_r \quad (54)$$

$$\alpha_t = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_2} \sin \alpha_e\right) \quad (55)$$

Für $\omega_c = \frac{1}{2}\omega$ ergibt sich

$$\alpha_t = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_2} \sin \alpha_e\right) \quad (56)$$

$$= \arcsin\left(\frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon_2}} \sin \alpha_e\right) \quad (57)$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sin \alpha_e\right) \quad (58)$$

$$= \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \alpha_e\right) \quad (59)$$

d)

$$\vec{S}_t = \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \quad (60)$$

$$= E_t e^{j(\omega t - k_2(\sin \alpha_t x + \cos \alpha_t y))} \vec{e}_z \quad (61)$$

$$\times \left(\frac{E_t}{\mu\omega} e^{j(\omega t - k_2(\sin \alpha_t x + \cos \alpha_t y))} \begin{pmatrix} k_2 \cos \alpha_t \\ -k_2 \sin \alpha_t \\ 0 \end{pmatrix} \right)^* \quad (62)$$

$$= E_t^2 \left(\frac{k_2}{\mu\omega} \right)^* (\vec{e}_z \times (\cos \alpha_t \vec{e}_x - \sin \alpha_t \vec{e}_y)) \quad (63)$$

$$= \frac{E_t^2 \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu}} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} (\cos \alpha_t \vec{e}_y + \sin \alpha_t \vec{e}_x) \quad (64)$$

- für $\omega_c > \omega$:

$$\vec{S}_t = j E_t^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1} (\cos \alpha_t \vec{e}_y + \sin \alpha_t \vec{e}_x) \quad (65)$$

- für $\omega_c < \omega$:

$$\vec{S}_t = E_t^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu}} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} (\cos \alpha_t \vec{e}_y + \sin \alpha_t \vec{e}_x) \quad (66)$$