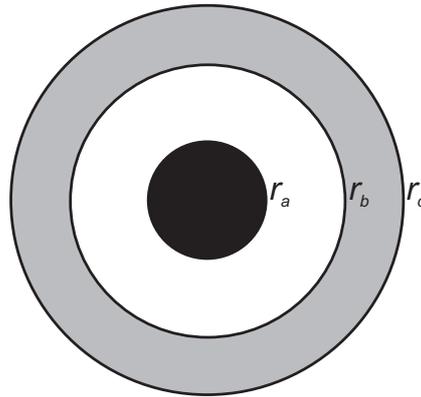


Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben ist folgende im Koordinatenursprung zentrierte, kugelsymmetrische Anordnung mit der Gesamtladung Q_{ges} . Es gelte überall im Raum $\varepsilon = \varepsilon_0$.



(1)	$0 \leq r < r_a$: $\rho = ???$: $\kappa = 0$: $\vec{E} = \alpha \frac{\rho_0}{\varepsilon} \vec{e}_r$: $\Phi = ???$
(2)	$r_a \leq r < r_b$: $\rho = ???$: $\kappa = 0$: $\vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(2 - 3 \frac{r_a^2 - r^2}{r_a^2 - r_b^2} \right) \vec{e}_r$: $\Phi = ???$
(3)	$r_b \leq r \leq r_c$: $\rho = ???$: $\kappa = \infty$: $\vec{E} = ???$: $\Phi = ???$
(4)	$r_c < r < \infty$: $\rho = 0$: $\kappa = 0$: $\vec{E} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{r_b^2}{r^2} \vec{e}_r$: $\Phi = ???$

a) Bestimmen Sie die Konstante α in (1) so, dass bei $r = r_a$ keine Flächenladungsdichte existiert.

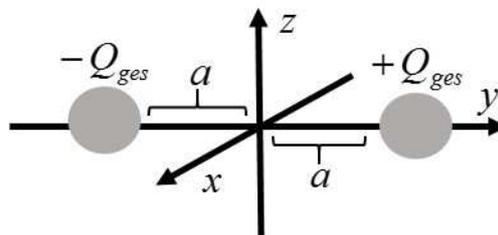
b) Berechnen Sie die unbekanntenen Größen in den Bereichen (2), (3) und (4).

Hinweis: Es gilt $\Phi(\infty) = 0$.

c) Die Raumladungsdichte ρ im Bereich (2) soll nun so geändert werden, dass der innere Radius der Kugel in diesem Bereich nur als kubischer Term in das elektrische Feld eingeht, d.h. $\vec{E}(r) \sim r_a^3$. Die Abhängigkeit des elektrischen Feldes vom Radius r ist von dieser Einschränkung nicht betroffen. Bestimmen Sie $\rho(r)$.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $\rho(r) = k \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\beta_n r)^n$, $\beta_n \in \{0, 1\}$.

Die geladene Anordnung aus a) wird nun entlang der y -Achse um $+a$ nach rechts verschoben. Eine entgegengesetzt geladene Anordnung wird symmetrisch dazu bei $-a$ platziert.



d) Berechnen Sie das elektrische Potential auf der gesamten y -Achse. Skizzieren Sie das Ergebnis als Funktion von y/a .

Hinweis: Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden.

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Grenzflächen: $\sigma = D_{n,2} - D_{n,1} = D_{r,2} - D_{r,1}$

Materialgleichung: $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \Rightarrow D_r = \varepsilon_0 \cdot E_r$

Ansatz: keine Flächenladung an der Grenzfläche bei $r = r_a$.

$$\begin{aligned} \sigma(r = r_a) &= D_{r,(2)}(r = r_a) - D_{r,(1)}(r = r_a) \\ 0 &= \varrho_0 \left(2 - 3 \frac{r_a^2 - r_a^2}{r_a^2 - r_b^2} \right) - \alpha \varrho_0 \\ \Rightarrow \alpha &= 2 \end{aligned}$$

b) Raumladungsdichte und \vec{E} -Feld:

$$r_a \leq r < r_b :$$

Satz von Gauss (differentialle Form):

$$\begin{aligned} \varrho = \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot D_r) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \left(2 - 3 \frac{r_a^2 - r^2}{r_a^2 - r_b^2} \right) \right) \\ \Rightarrow \varrho(r) &= \varrho_0 \cdot \left(\frac{4}{r} - \frac{6r_a^2 - 12r^2}{r(r_a^2 - r_b^2)} \right) \end{aligned}$$

$$r_b \leq r \leq r_c :$$

idealer Leiter ($\kappa = \infty$): $\Rightarrow \vec{E} = 0 \quad \varrho = 0$

Elektrisches Potential:

Skalarpotential (Elektrostatik): $\Phi_{el}(\vec{r}_2) - \Phi_{el}(\vec{r}_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{s}$

Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{e}_r \Rightarrow d\vec{s} = \vec{e}_r \cdot dr$

$$r_c < r < \infty :$$

$$\begin{aligned} \Phi(r) - \underbrace{\Phi(\infty)}_{=0} &= - \int_{\infty}^r \left(- \frac{\varrho_0 r_b^2}{\varepsilon r'^2} \right) dr' \\ \Rightarrow \Phi(r) &= - \frac{\varrho_0 r_b^2}{\varepsilon r} \end{aligned}$$

$$r_b \leq r \leq r_c :$$

$$\begin{aligned}\Phi(r) - \Phi(r_c) &= - \int_{r_c}^r 0 \, dr' \\ \Rightarrow \Phi(r) &= \Phi(r_c) = - \frac{\rho_0 r_b^2}{\varepsilon r_c}\end{aligned}$$

$$r_a \leq r < r_b :$$

$$\begin{aligned}\Phi(r) - \Phi(r_b) &= - \int_{r_b}^r \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(2 - 3 \frac{r_a^2 - r'^2}{r_a^2 - r_b^2} \right) dr' \\ &= - \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left[2r' - 3 \frac{r_a^2 r' - \frac{1}{3} r'^3}{r_a^2 - r_b^2} \right]_{r_b}^r \\ \Rightarrow \Phi(r) &= - \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(2r - 3 \frac{r_a^2 r - \frac{1}{3} r^3}{r_a^2 - r_b^2} - 2r_b + 3 \frac{r_a^2 r_b - \frac{1}{3} r_b^3}{r_a^2 - r_b^2} \right) \underbrace{- \frac{\rho_0 r_b^2}{\varepsilon r_c}}_{=\Phi(r_b)}\end{aligned}$$

c) Für die Raumladungsdichte in Bereich (1) gilt:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot 2 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \right) \\ \Rightarrow \rho(r) &= 4 \frac{\rho_0}{r}\end{aligned}$$

Das \vec{E} -Feld in Bereich (2) wird mit $\oint \vec{D} \, d\vec{f} = \int \rho \, dv$ (Satz von Gauss) berechnet:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon_0 E_r \cdot r^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(r') \cdot r'^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, dr' \\ 4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0 E_r &= 4\pi \cdot \int_0^{r_a} 4 \frac{\rho_0}{r'} \cdot r'^2 \, dr' + 4\pi \cdot \int_{r_a}^r \rho(r') \cdot r'^2 \, dr' \\ &= 4\pi \cdot \left(\underbrace{2\rho_0 r_a^2}_A + \int_{r_a}^r k \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\beta_n r')^n \cdot r'^2 \, dr' \right)\end{aligned}$$

Damit das \vec{E} -Feld von r_a rein kubisch abhängt, muss der quadratische Term r_a^2 im konstanten Faktor A kompensiert werden. Darüber hinaus muss ein kubischer Term ergänzt werden. Daraus folgen $\beta_n = 0 \, \forall n \notin \{-1, 0\}$ und $\rho(r) = k \cdot \left(\frac{1}{r} + 1\right)$.

$$\begin{aligned}r^2 \cdot \varepsilon_0 E_r &= A + \int_{r_a}^r k \cdot \left(\frac{1}{r'} + 1\right) \cdot r'^2 \, dr' \\ &= A + k \left[\frac{1}{2} r'^2 + \frac{1}{3} r'^3 \right]_{r_a}^r = A + \frac{k}{2} (r^2 - r_a^2) + \frac{k}{3} (r^3 - r_a^3)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert für $A \stackrel{!}{=} 0$

$$2\varrho_0 \stackrel{!}{=} \frac{k}{2} \Rightarrow k = 4\varrho_0$$

Damit folgt die gesuchte Raumladungsdichte zu

$$\Rightarrow \varrho(r) = 4\varrho_0 \cdot \left(\frac{1}{r} + 1 \right)$$

- d) Das \vec{E} -Feld außerhalb einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung ist gleich dem Punktladungsfeld der im Kugelmittelpunkt zentrierten Gesamtladung Q .

Das Potential berechnet sich in kartesischen Koordinaten zu:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Auf der y -Achse gilt $(x, y, z) \rightarrow (0, y, 0)$:

$$\Phi(0, y, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{|y|}$$

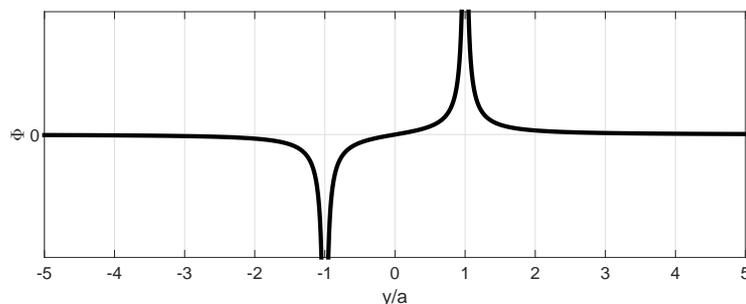
Die Ladungsverteilung der einzelnen Anordnungen verändert sich durch die Anwesenheit weiterer Ladungen nicht. Deshalb ergibt sich das gesuchte Gesamtpotential durch Superposition der entsprechend um $\pm a$ verschobenen Einzelpotentiale:

$$\begin{aligned} \Phi_{ges}(0, y, 0) &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{|y-a|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{|y+a|} \\ &= \frac{Q_{ges}}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{|y-a|} - \frac{1}{|y+a|} \right) \end{aligned}$$

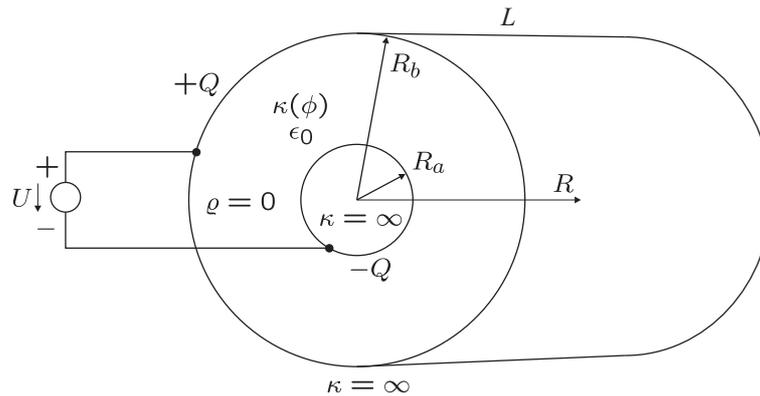
Dieser Ausdruck kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\Phi_{ges}(0, y, 0) = \frac{Q_{ges}}{4\pi\epsilon a} \cdot \left(\frac{1}{|y/a-1|} - \frac{1}{|y/a+1|} \right)$$

Die gesuchte graphische Darstellung des Potentials als Funktion von y/a ist nachfolgend dargestellt.



Aufgabe 2 (16 Punkte)



Die Elektroden des Zylinderkondensators (Länge L) bei $R = R_a$ und $R = R_b$ bestehen aus ideal leitfähigem Material und sind durch die angelegte Spannung U mit $-Q$ und $+Q$ geladen. Das Potential der inneren Platte wird zu $\Phi(R_a) = 0$ angenommen. Zwischen den Elektroden befindet sich ein leitfähiges Material mit der winkelabhängigen Leitfähigkeit

$$\kappa(\phi) = \kappa_0 \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

und der Dielektrizität von ϵ_0 . Es lässt sich zeigen, dass bei dieser Anordnung im Bereich $R_a < R < R_b$ keine Raumladungen $\rho = 0$ auftreten und dass die Stromkomponente $J_\phi(R, \phi)$ für alle R und ϕ verschwindet. Verwenden Sie diese Angaben zum Lösen der folgenden Aufgaben.

- Berechnen Sie die elektrische Feldstärke \vec{E} in Abhängigkeit von R und Q zwischen den Elektroden.
- Skizzieren Sie qualitativ das elektrische Feld im ganzen Raum.
- Berechnen Sie das elektrische Potential $\Phi(R)$ zwischen den Kondensatorplatten.
- Bestimmen Sie die angelegte Spannung U in Abhängigkeit der Ladung Q .
- Berechnen Sie den Strom I der durch das leitfähige Kondensatormaterial fließt.
- Bestimmen Sie die komplexe Impedanz Z des verlustbehafteten Kondensators. Verwenden Sie dafür:

$$I = -\frac{2Q\kappa_0}{\epsilon_0}$$

$$U = \frac{Q}{2L\epsilon_0}$$

Lösung 2 (16 Punkte)

a) Ansatz: $\int \vec{D} d\vec{A} = -Q$

Die Ladungsverteilung auf den Leiteroberflächen ist unabhängig von ϕ , da die Leiteroberflächen ideal leitfähig sind. Weiterhin existieren keine Raumladungen zwischen den Platten, weshalb $\vec{D} = D_R(R)\vec{e}_R$ gilt.

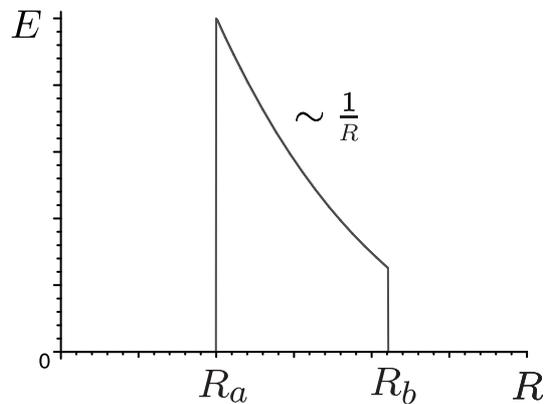
$$\int_0^L \int_0^{2\pi} D_R(R) \cdot R \cdot d\phi dz = -Q$$

$$D_R(R) \cdot R \cdot 2\pi L = -Q$$

$$D_R(R) = -\frac{Q}{2\pi LR}$$

$$E_R(R) = -\frac{Q}{2\pi LR\epsilon_0}$$

b) Skizze:



c) Ansatz:

$$\Phi(R) - \underbrace{\Phi(R_a)}_{=0} = -\int_{R_a}^R E_R(R) dR$$

$$\Phi(R) = \int_{R_a}^R \frac{Q}{2\pi LR\epsilon_0} dR$$

$$\Phi(R) = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{R}{R_a}\right)$$

d)

$$U = \Phi(R_b) - \Phi(R_a)$$

$$= \Phi(R_b)$$

$$= \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)$$

e) Ansatz: $J_R(R, \phi) = \kappa(\phi) \cdot E_R(R)$ und $I = \int \vec{J} d\vec{A}$

$$J_R(R, \phi) = -\kappa_0 \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{Q}{2\pi LR\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L \int_0^{2\pi} J_R(R, \phi) \cdot R \cdot d\phi \cdot dz \\ &= - \int_0^L \int_0^{2\pi} \kappa_0 \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} \cdot d\phi \cdot dz \\ &= - \frac{Q\kappa_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot d\phi \\ &= - \frac{Q\kappa_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[-2 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]_{\phi=0}^{2\pi} \\ &= - \frac{2Q\kappa_0}{\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

f) Widerstand: $R = \frac{U}{-I}$, da Strompfeil in negative R -Richtung zeigt.

$$\begin{aligned} R &= \frac{Q}{2L\epsilon_0} \cdot \frac{\epsilon_0}{2Q\kappa_0} \\ &= \frac{1}{4L\kappa_0} \end{aligned}$$

Kapazität: $C = \frac{Q}{U}$

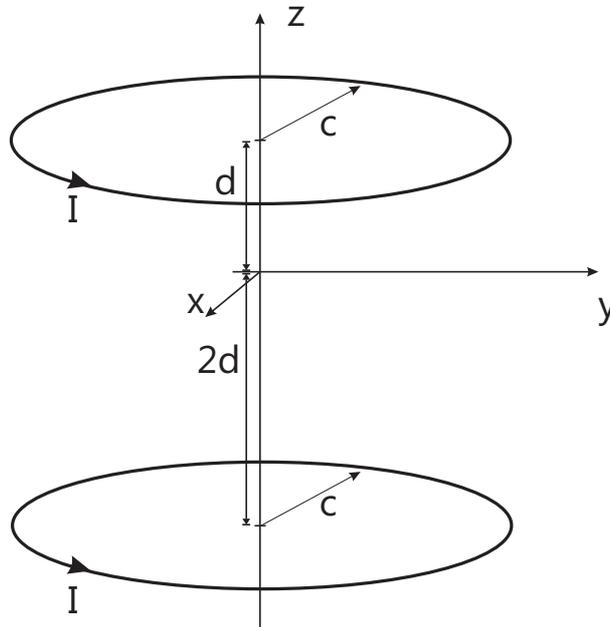
$$\begin{aligned} C &= Q \cdot \frac{2L\epsilon_0}{Q} \\ &= 2L\epsilon_0 \end{aligned}$$

Impedanz: $Z = \frac{1}{1/R + j\omega C}$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2L\kappa_0 + j\omega \cdot 2L\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{2L} \cdot \frac{1}{\kappa_0 + j\omega\epsilon_0} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben seien zwei übereinander liegende Spulen mit jeweils N Wicklungen und dem Radius c , die um die z -Achse zentriert sind. Die obere der beiden Spulen hat zur x - y -Ebene den Abstand d , die untere Spule den Abstand $2d$ zur x - y -Ebene. Beide Spulen werden von dem Gleichstrom I durchflossen.



- a) Berechnen Sie zunächst nur das Feld \vec{B}_{z1} , das die obere der beiden Spulen auf der z -Achse erzeugt. Verwenden Sie hierzu kartesische Koordinaten und zeigen Sie rechnerisch, dass lediglich ein \vec{B} -Feld in Richtung der z -Achse vorhanden ist.

Falls Sie Aufgabenteil a) nicht lösen konnten, rechnen Sie im Folgenden mit

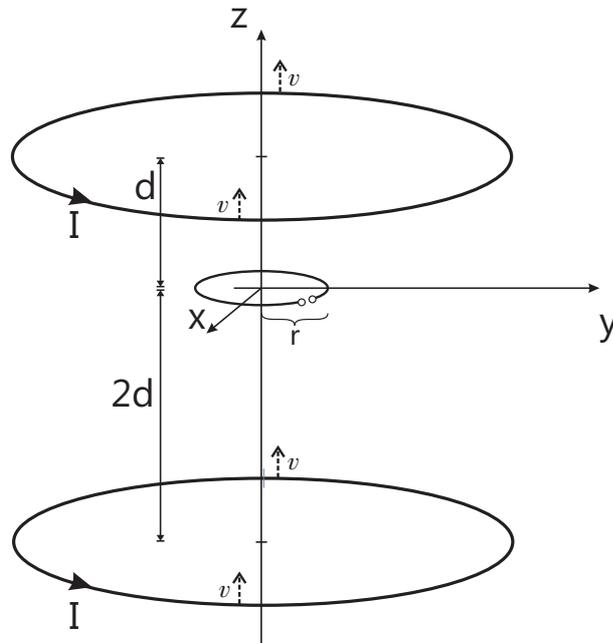
$$\vec{B}_1(z) = \frac{\alpha I}{(\beta^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

weiter.

- b) Geben Sie nun das Gesamtfeld auf der z -Achse an, das von *beiden* Spulen erzeugt wird.

Es befinde sich nun eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius r zwischen den beiden Spulen. Diese liegt in der x - y -Ebene, um die z -Achse zentriert. Durch den deutlich kleineren Radius der Leiterschleife ($r \ll c$), kann von einem homogenen Magnetfeld im Bereich der Leiterschleife ausgegangen werden.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird das Spulenpaar mit der Geschwindigkeit $v = v_0 \cdot (1 - \cos(\pi t))$ nach oben bewegt, bis die Leiterschleife symmetrisch zwischen beiden Spulen liegt. Währenddessen ruht die Leiterschleife in der x - y -Ebene.



- c) Wie muss v_0 gewählt werden, damit die Leiterschleife zum Zeitpunkt $t_1 = 2$ symmetrisch zwischen beiden Spulen liegt?

Verwenden Sie im Folgenden die Werte für t_1 und v_0 aus Aufgabenteil c).

- d) Berechnen Sie den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durch die Leiterschleife für $t \geq 0$.
- e) Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Spannung $U_{ind}(t)$ für $t \geq 0$.

Lösung 3 (16 Punkte)

a) Gesetz von Biot-Savart für Linienleiter:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Unter Verwendung von kartesischen Koordinaten ergibt sich

$$\vec{r}' = c \cdot \cos(\varphi) \vec{e}_x + c \cdot \sin(\varphi) \vec{e}_y + d \vec{e}_z$$

$$\vec{r} = z \vec{e}_z$$

$$d\vec{s}' = \vec{e}_\varphi c d\varphi = c \cdot (-\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y) d\varphi$$

und somit

$$\vec{r} - \vec{r}' = -c \cdot \cos(\varphi) \vec{e}_x - c \cdot \sin(\varphi) \vec{e}_y + (z - d) \vec{e}_z$$

$$d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} c(z-d) \cos(\varphi) \\ c(z-d) \sin(\varphi) \\ c^2 \end{pmatrix} d\varphi$$

Für das Feld \vec{B}_{z1} ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(z) &= \frac{\mu NI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} c(z-d) \cos(\varphi) \\ c(z-d) \sin(\varphi) \\ c^2 \end{pmatrix}}{(c^2 + (z-d)^2)^{3/2}} d\varphi \\ &= \frac{\mu NI}{4\pi} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi c^2 \end{pmatrix}}{(c^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu c^2 NI}{(c^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Die Integrale $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi$ und $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi$ sind Null. Somit wurde gezeigt, dass das B-Feld auf der z -Achse lediglich eine Komponente in z -Richtung besitzt.

b) Das Feld der unteren Spule ist durch Einsetzen von $-2d$ anstatt d gegeben:

$$\vec{B}_2(z) = \frac{1}{2} \frac{\mu c^2 NI}{(c^2 + (z + 2d)^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

Somit ergibt sich für das Gesamtfeld

$$\vec{B}_{ges}(z) = \frac{\mu c^2 N I}{2} \left(\frac{1}{(c^2 + (z-d)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(c^2 + (z+2d)^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_z.$$

- c) Damit die Leiterschleife symmetrisch zwischen beiden Spulen liegt, müssen diese um die Strecke $s(t_1) = d/2$ bewegt werden. Durch Integration der Geschwindigkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} s(t_1) &= \int_0^{t_1} v_0(1 - \cos(\pi t')) dt' \\ &= v_0 \left(t_1 - \frac{\sin(\pi t_1)}{\pi} \right) \\ &= 2v_0. \end{aligned}$$

Somit ist $v_0 = d/4$.

- d) Formel für den magnetischen Fluss

$$\Phi(t) = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Die Fläche der Leiterschleife beträgt $A = \pi r^2$. Dies ist während der ganzen Zeit auch der Anteil der Fläche, welcher normal zur z -Achse ist.

Während der Bewegung der Spulen ist die Position der oberen Spule durch $d_o = d + \int_0^t v(t') dt'$ und die der unteren Spule durch $d_u = -2d + \int_0^t v(t') dt'$ gegeben. Da die Leiterschleife ruht, gilt immer $z = 0$. Lösen des Integrals

$$\int_0^t v_0(1 - \cos(\pi t')) dt' = v_0 \cdot \left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right)$$

Eingesetzt ergibt dies den magnetischen Fluss

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{\mu N I c^2 \pi r^2}{2} \left(\frac{1}{(c^2 + (d + v_0 \cdot (t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}))^2)^{3/2}} + \frac{1}{(c^2 + (2d - v_0 \cdot (t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}))^2)^{3/2}} \right) & , \text{ falls } 0 \leq t < t_1 \\ \mu N I c^2 \pi r^2 \left(\frac{1}{(c^2 + (\frac{3}{2}d)^2)^{3/2}} \right) & , \text{ falls } t \geq t_1 \end{cases}$$

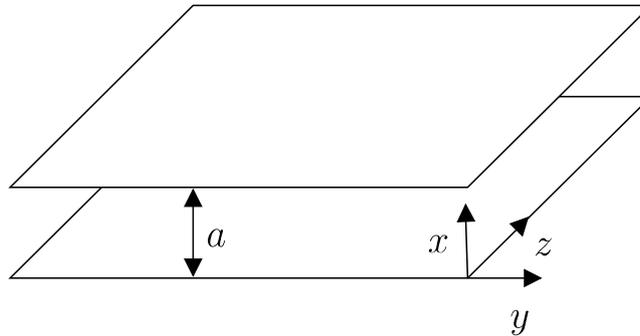
- e) Die induzierte Spannung $U_{ind}(t)$ ergibt sich durch $U_{ind}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$ zu

$$U_{ind}(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} \mu N I c^2 \pi r^2 v_0 \cdot (1 - \cos(\pi t)) \left(\frac{d + v_0 \left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right)}{(c^2 + (d + v_0 \cdot (t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi}))^2)^{5/2}} - \frac{2d - v_0 \left(t - \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right)}{(c^2 + (\frac{3}{2}d)^2)^{5/2}} \right) & , \text{ falls } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & , \text{ falls } t > t_1 \end{cases}$$

Bei Verwendung von v_0 und t_1 aus Aufgabenteil c) ist $\Phi(t)$ stetig differenzierbar.

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Wellenleiter bestehend aus zwei leitenden Platten, die in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnt sind. Hierbei sind die Platten im Abstand a parallel zueinander gelegen und von Vakuum umgeben.



Zwischen den Platten breitet sich eine TM-Welle in z -Richtung aus. Allgemein kann für Ausbreitung von geführten Wellen in z -Richtung für die Feldkomponenten folgender Ansatz gemacht werden:

$$E_x = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_x = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} + j \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$H_y = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} - j \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

- Durch welche Feldkomponenten ist eine TM-Welle in z -Richtung allgemein definiert?
- Geben Sie die Randbedingungen für E_z an. Begründen Sie ihre Antwort.
- Berechnen Sie das \vec{E} -Feld und \vec{H} -Feld der TM-Welle durch Separation der Variablen.
- Berechnen Sie die Cut-Off Frequenz für den ersten Mode einer TM-Welle.
- Wie groß muss der Plattenabstand a gewählt werden, damit sich bei einer Frequenz von 5,0GHz nur der erste Mode ausbreitet? (Hinweise: Der Wellenleiter ist von Vakuum umgeben, rechnen Sie daher mit $\mu_r = \varepsilon_r = 1$)

Lösung 4 (16 Punkte)

- a) Eine transversal-magnetische Welle mit Ausbreitungsrichtung z setzt sich allgemein aus folgenden Komponenten zusammen: H_x, H_y, E_x, E_y, E_z .
- b) Die Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes wird aufgrund der Stetigkeitsbedingung am Wellenleiter zu Null. Daher gilt für $E_z(x=0) = E_z(x=a) = 0$.
- c) Die allgemeine Wellengleichung im Vakuum ist definiert durch:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Aufgrund der unendlichen Ausdehnung in y -Richtung kann die allgemeine Wellengleichung wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon E_z &= 0 \end{aligned}$$

Lösen der DLG mittels Separationsansatz:

$$\begin{aligned} E_z(x, z, t) &= U(x) \cdot W(z, t) \quad W(z, t) = e^{j(\omega t - k_z z)} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z(x, z, t)}{\partial z^2} &= -k_z^2 E_z(x, z, t) \end{aligned}$$

Einsetzen in Wellengleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x) W(z, t)}{\partial x^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) U(x) W(z, t) &= 0 \\ \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) &= 0 \\ \Rightarrow \omega^2 \mu \varepsilon = k_x^2 + k_z^2, \quad \text{da} \quad \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} &= -k_x^2 \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Randbedingung $E_z(x=0) = 0, E_z(x=a) = 0$ aus Aufgabe b) und mit $U(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$ folgt:

$$E_z = A \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mittels E_z werden nun die transversalen Komponenten der Felder berechnet:

$$E_x = \frac{-jk_z}{k_x^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{-jk_z}{k_x} A \cos(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)} = \frac{-jk_z a}{n\pi} A \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)},$$

$$H_y = \frac{j\omega\varepsilon}{k_x^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{j\omega\varepsilon}{k_x} A \cos(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)} = \frac{j\omega\varepsilon a}{n\pi} A \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)},$$

$$E_y = 0,$$

$$H_x = 0.$$

d) Zur Berechnung der Cut-Off Frequenz des ersten Modes muss zunächst k_z ermittelt werden:

$$\omega^2 \mu \varepsilon = k_x^2 + k_z^2$$

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \frac{n\pi}{a} \quad n = 1$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \frac{\pi}{a}$$

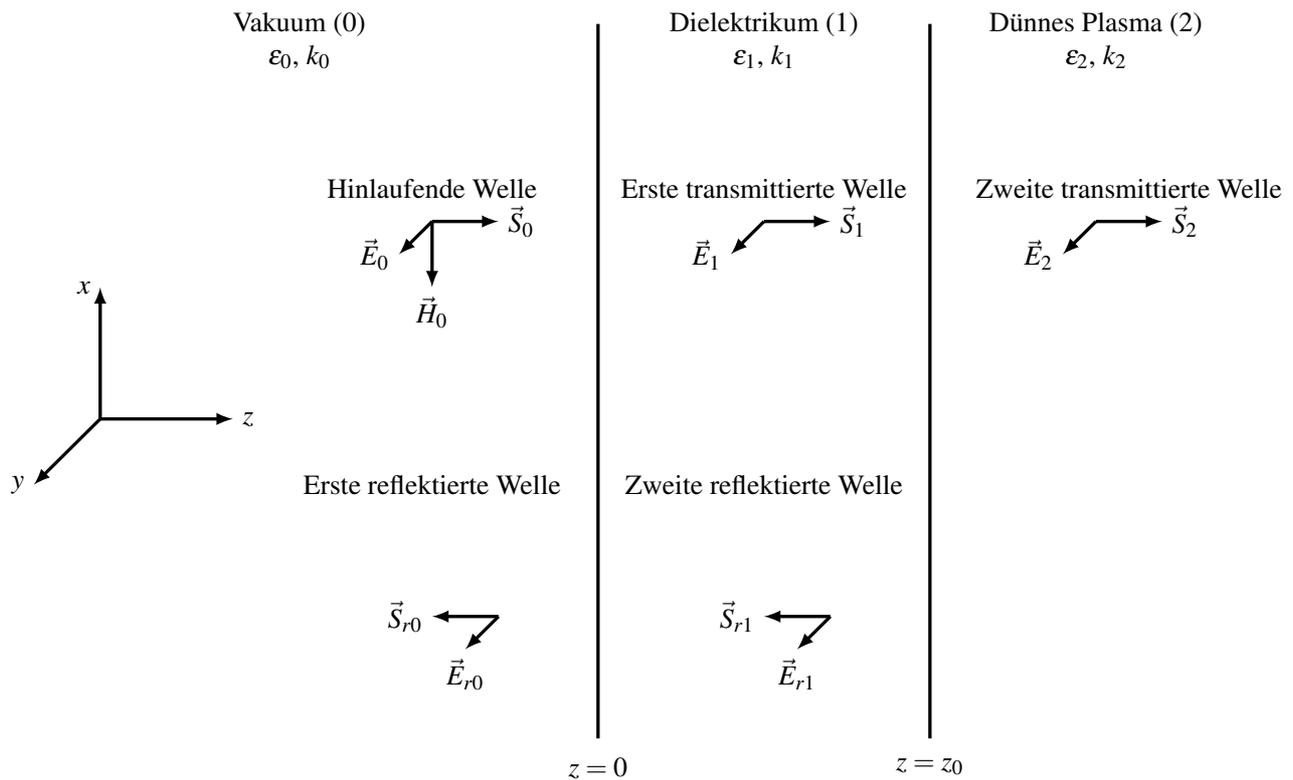
e) Mittels der der Cut-Off Frequenz ω_c kann der Plattenabstand a mit gegebener Frequenz $f = 5,0\text{GHz}$ berechnet werden.

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{\pi}{a}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{\pi}{2\pi f} \quad f = 5,0\text{GHz}, \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

$$a = 3\text{cm}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)



Eine ebene Welle breitet sich im Vakuum in positiver z -Richtung aus, wo $\kappa = 0$ gilt. Bei $z = 0$ trifft sie auf das erste, dielektrische Medium mit $\epsilon = \epsilon_1$. Bei $z = z_0$ trifft sie auf das zweite Medium (ionisiertes Gas bzw. dünnes Plasma). Hier gilt $\epsilon_2 = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}$ mit $\omega_c = \text{const.}$ Ein Teil der Welle wird an jeder Grenzfläche reflektiert, der übrige Teil dringt in das jeweilige Medium ein. In diesem Zusammenhang sind Vielfach-Reflexionen zu vernachlässigen. Für die im Vakuum hinlaufende Welle gilt:

$$\vec{E}_0 = E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y, \quad \vec{H}_0 = H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x. \quad (1)$$

- Berechnen Sie die Wellenzahlen k_1 im Dielektrikum und k_2 im dünnen Plasma in Abhängigkeit von ω_c und ω .
- Stellen Sie für das \vec{E} -Feld der transmittierten Welle im dünnen Plasma (\vec{E}_2) und das \vec{E} -Feld der vom dünnen Plasma bei z_0 reflektierten Welle (\vec{E}_{r1}) jeweils einen allgemeinen Ansatz auf. Berechnen Sie anschließend das jeweils dazugehörige \vec{H} -Feld.
- Es gilt $|E_0| = \Gamma_0 |H_0|$. Γ_0 wird als Wellenwiderstand bezeichnet. Leiten Sie mit Hilfe der MAXWELL-Gleichungen Γ_0 aus Gleichung (1) her. Nehmen Sie dabei vereinfachend $k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu \epsilon_0}$ an.
- Welche Bedingungen gelten für $E_0, E_1, E_{r0}, E_2, E_{r1}$ und $H_0, H_1, H_{r0}, H_2, H_{r1}$ an den Grenzflächen? Ergänzen Sie außerdem in der Zeichnung die fehlenden \vec{H} -Feldvektoren.
- Berechnen Sie die \vec{E} -Felder der in das dünne Plasma transmittierten und vom dünnen Plasma reflektierten Welle in Abhängigkeit von E_1, k_1, k_2 für den allgemeinen Fall unter Annahme der Vereinfachung $k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$. Nehmen Sie anschließend $\omega > \omega_c$ an und machen Sie eine

Näherung für $\omega \gg \omega_c$. Berechnen Sie für diesen Fall den zeitlichen Mittelwert der Energiedichte im Plasma.

Lösung 5 (16 Punkte)

a) Aus der Wellengleichung ist $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ bekannt. Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \omega^2 \epsilon_1 \mu \\ \Rightarrow k_1 &= \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} \end{aligned} \quad (2)$$

Für die Wellenzahl k_2 ergibt sich durch Einsetzen und Auflösen:

$$\begin{aligned} k_2^2 &= \omega^2 \epsilon_2 \mu \\ &= \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \epsilon_0 \mu \\ \Rightarrow k_2 &= \omega \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \epsilon_0 \mu} \\ &= \sqrt{(\omega^2 - \omega_c^2) \epsilon_0 \mu} \end{aligned} \quad (3)$$

b) Aus der Aufgabenstellung ist $\vec{E}_0 = E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y$, $\vec{H}_0 = H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$ bekannt. Für das \vec{E} -Feld der transmittierten Welle (\vec{E}_2) gilt daher analog:

$$\vec{E}_2 = E_2 e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_y. \quad (4)$$

Da die reflektierte Welle (\vec{E}_{r1}) entgegen der Ausbreitungsrichtung der einfallenden bzw. transmittierten Welle läuft, ergibt sich:

$$\vec{E}_{r1} = E_{r1} e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{e}_y. \quad (5)$$

Für die \vec{H} -Felder ergibt sich aus dem Ansatz $\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ für \vec{H}_2 :

$$\vec{H}_2 = -\frac{k_2}{\mu \omega} E_2 e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_x \quad (6)$$

und für \vec{H}_{r1} :

$$\vec{H}_{r1} = \frac{k_1}{\mu \omega} E_{r1} e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{e}_x. \quad (7)$$

c) Die MAXWELL-Gleichungen liefern:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}. \quad (8)$$

Da der Wellenwiderstand Γ_0 das Verhältnis zwischen dem \vec{E} -Feld \vec{E}_0 und dem \vec{H} -Feld \vec{H}_0 beschreibt, müssen in Gleichung (8) beide Seiten berechnet und anschließend gleich gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x \\ &= E_0 k_0 j e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x \end{aligned} \quad (9)$$

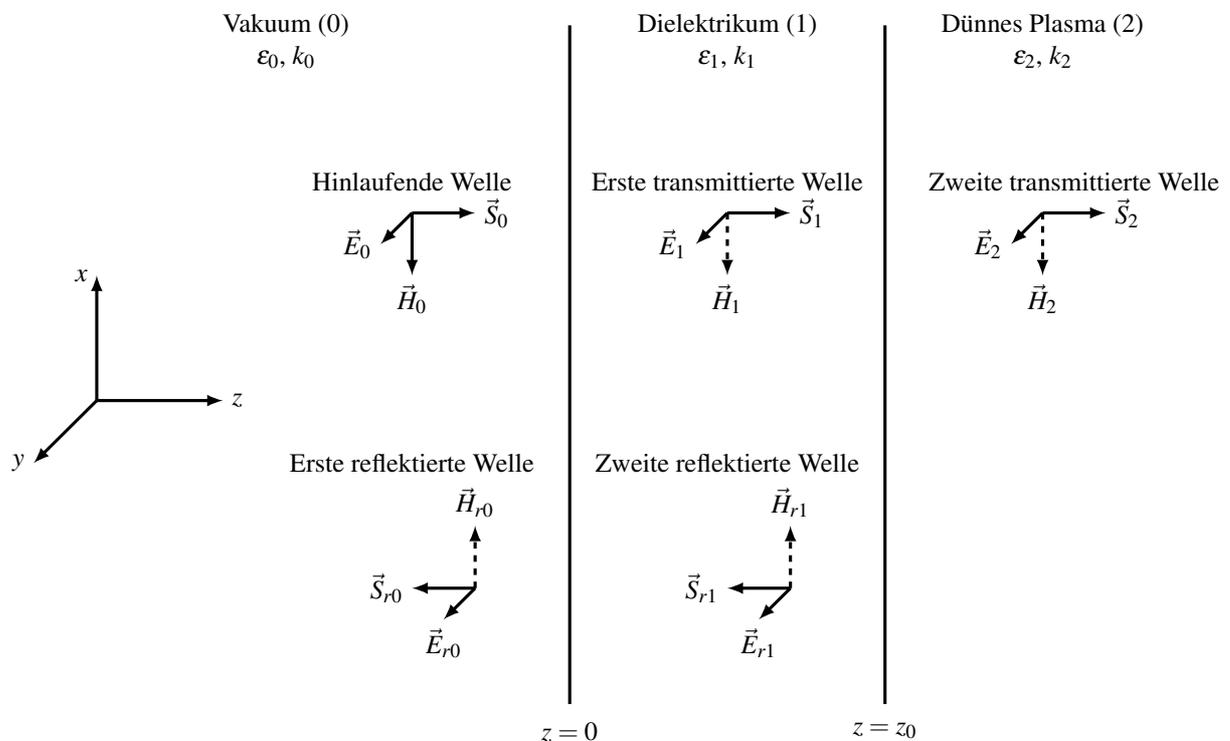
und

$$-\frac{d}{dt} \vec{B} = -\mu H_0 \omega j e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x. \quad (10)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (9) und (10) und durch Nutzung der Hinweises aus der Aufgabenstellung $k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 E_0 k_0 j e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x &= -\mu H_0 \omega j e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x \\
 E_0 k_0 &= -\mu H_0 \omega \\
 E_0 &= -\frac{\mu \omega}{k_0} H_0 \quad \text{Einsetzen des Hinweises} \\
 &= -\frac{\mu \omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon_0}} H_0 \\
 &= -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} H_0 \\
 \Rightarrow \Gamma_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

d) Die zu ergänzenden Pfeile sind in der Zeichnung gestrichelt dargestellt.



Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt für die \vec{E} -Felder:

$$\begin{aligned}
 E_0 + E_{r0} &= E_1 + E_{r1} \\
 E_1 + E_{r1} &= E_2.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Für die \vec{H} -Felder ergibt sich entsprechend:

$$\begin{aligned}
 H_0 + H_{r0} &= H_1 + H_{r1} \\
 H_1 + H_{r1} &= H_2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

e) Aus Aufgabenteil d) gilt für das \vec{E} -Feld:

$$E_1 + E_{r1} = E_2 \tag{14}$$

und aus dem \vec{H} -Feld folgt:

$$\begin{aligned} H_1 + H_{r1} &= H_2 \\ -\frac{k_1}{\mu\omega} E_1 + \frac{k_1}{\mu\omega} E_{r1} &= -\frac{k_2}{\mu\omega} E_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Umformen und Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} E_1, \\ E_{r1} &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} E_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Zur weiteren Lösung der Aufgabe werden k_1 und k_2 aus Aufgabenteil a) herangezogen. Es ergibt sich für E_2 und E_{r1} :

$$E_2 = \frac{2\omega\sqrt{\epsilon_1\mu}}{\omega\sqrt{\epsilon_1\mu} + \sqrt{\epsilon_0\mu}(\omega^2 - \omega_c^2)} E_0 \approx \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_0}} E_0, \quad (17)$$

$$E_{r1} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_1\mu} - \sqrt{\epsilon_0\mu}(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega\sqrt{\epsilon_1\mu} + \sqrt{\epsilon_0\mu}(\omega^2 - \omega_c^2)} E_0 \approx \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_0}} E_0. \quad (18)$$

Zur Berechnung des zeitlichen Mittelwertes der Energiestromdichte wird Gleichung (17) genutzt:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{k_2}{\mu\omega} E_2^2 \vec{e}_z \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_0\mu}(\omega^2 - \omega_0^2)}{\mu\omega} \left(\frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_0}} \right)^2 E_0^2 \vec{e}_z \\ \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{S} \} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon_0\mu}(\omega^2 - \omega_0^2)}{\mu\omega} \left(\frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_0}} \right)^2 E_0^2 \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (19)$$