Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben sei die in Abbildung 1 dargestellte Anordnung dreier Punktladungen q_i, die sich an festen Positionen P_i in der xy–Ebene befinden. Es gelte überall im Raum $\kappa = 0$ und $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ sowie:

$$q_i = \begin{cases} +q & \text{für } i = 1 \\ -q & \text{für } i = 2 \\ +q & \text{für } i = 3 \end{cases} \qquad P_i(x_i, y_i, z_i) = \begin{cases} P(0,0,0) & \text{für } i = 1 \\ P(0,c,0) & \text{für } i = 2 \\ P(c,c,0) & \text{für } i = 3 \end{cases} \tag{1}$$

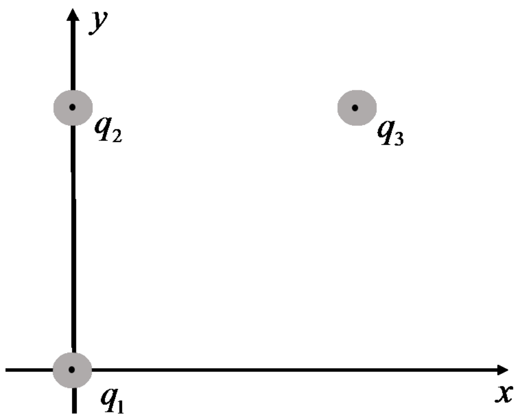


Abbildung 1: System mit drei Punktladungen

a) Zeichnen Sie in Abbildung 1 die Vektoren der auf die Ladung q_3 wirkenden Kräfte $\vec{F}_{13}$ und $\vec{F}_{23}$ sowie der daraus resultierenden Kraft $\vec{F}_3$ qualitativ unter Berücksichtigung der Richtung ein.

b) Berechnen Sie den Betrag der Kraft $\vec{F}_3$ sowie ihren Winkel ϕ bezüglich der positiven x–Achse.

Die Ladungen q_1, q_2 und q_3 werden nun durch eine im Koordinatenursprung zentrierte Kugel mit Radius r_a ersetzt. Es gelten nachfolgende Verteilungen für Ladung und relative Dielektrizitätszahl:

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_i = 0 & \text{für } r < r_a \\ \\ \varrho_a = k/r^7 & \text{für } r \geq r_a \end{cases} \qquad \varepsilon_r(r) = \begin{cases} \varepsilon_{r,i} = 1 & \text{für } r < r_a \\ \\ \varepsilon_{r,a} = \alpha & \text{für } r \geq r_a \end{cases} \tag{2}$$

c) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ im ganzen Raum.

d) Berechnen Sie unter Vernachlässigung von Reibungskräften die notwendige Energie ΔW, um eine Punktladung q_4 vom Punkt $P_4(0, 3b, 0)$ nach $P_5(b, 0, 0)$ zu verschieben ($b \gg r_a$).

<u>Hinweis</u>: Für die dem System zugeführte potentielle Energie gilt $W_{pot} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{s}$.

e) Nun seien $\vec{E} = \frac{E_0}{r} e^{-r} \cdot \vec{e}_r$ und $\varepsilon_a = \varepsilon_r\varepsilon_0$ für $r \geq r_a$. Berechnen Sie die Energie W_{ges} im Raum für $r \in (r_a, \infty)$.

<u>Hinweis</u>: Die Aufgabenteile a) & b), c) & d) sowie e) sind jeweils unabhängig voneinander lösbar.

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Lösung siehe Abbildung :

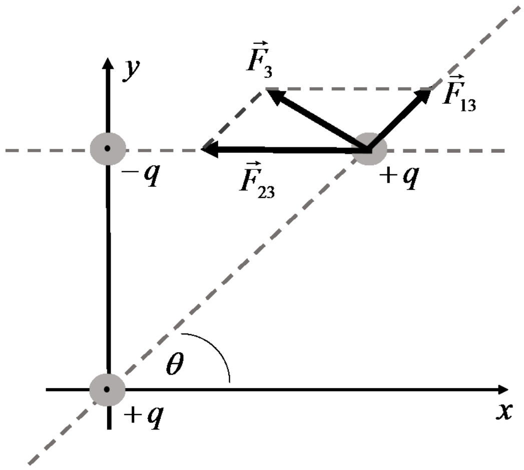


Abbildung 2: System mit drei Punktladungen

b) N Punktladungen

Kraftgleichung:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \cdot \vec{e}_{r_{ij}}$$

Die resultierende Kraft auf die Ladung q_3 ergibt sich nach dem Superpositionsprinzip somit zu

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \cdot \vec{e}_{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \cdot \vec{e}_{r_{23}} \right) \\ &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{(\sqrt{2}c)^2} \cdot \vec{e}_{r_{13}} - \frac{1}{c^2} \cdot \vec{e}_{r_{23}} \right) \end{aligned}$$

Die Richtungsvektoren $\vec{e}_{r_{ij}}$ zeigen von q_i nach q_j. In kartesischen Koordinaten lassen sie sich unter Berücksichtigung der Geometrie in Abbildung (d.h. $\theta = 45°$) schreiben als

$$\vec{e}_{r_{13}} = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2} \qquad \vec{e}_{r_{23}} = \vec{e}_x$$

Betrag und Richtung der Kraft ergeben sich dann aus ihren Komponenten F_x und F_y.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{F}_3| &= \sqrt{{F_{3,x}}^2 + {F_{3,y}}^2} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} \approx \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \cdot \frac{0.74}{c^2} \\ \Rightarrow \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}}\right) + \pi \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{1 - 2\sqrt{2}}\right) + \pi \approx 151.32° \end{aligned}$$

c) $\vec{E}$-Feld

Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{e}_r \;\Rightarrow d\vec{s} = \vec{e}_r \cdot dr$

Materialgleichung: $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \;\Rightarrow D_R = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot E_R$

Das $\vec{E}$-Feld wird mit $\oint \vec{D}\, d\vec{f} = \int \varrho\, dv$ (Satz von Gauss) berechnet:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon\, E_r \cdot\, r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi \;=\; \int_0^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varrho(r') \cdot r'^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr'$$

$r < r_a$:

$$\begin{aligned} 4\pi\varepsilon_i r^2 \cdot E_{r,i} &= 4\pi \cdot \int_0^r \underbrace{\varrho(r')}_{\varrho_i=0} \cdot r'^2\, dr' \\ \Rightarrow E_{r,i} &= 0 \end{aligned}$$

$r_a \leq r$:

$$\begin{aligned} 4\pi\varepsilon_a r^2 \cdot E_{r,a} &= 4\pi \cdot \left(\int_0^{r_a} \varrho_i(r') \cdot r'^2\, dr' + \int_{r_a}^{r} \varrho_a(r') \cdot r'^2\, dr' \right) \\ \varepsilon_{r,a}\varepsilon_0 r^2 \cdot E_{r,a} &= 0 + \int_{r_a}^{r} \frac{k}{r^5}\, dr' \\ \alpha\varepsilon_0 r^2 \cdot E_{r,a} &= \left[-\frac{k}{4}\, \frac{1}{r'^4} \right]_{r_a}^{r} \\ \Rightarrow E_{r,a} &= \frac{k}{4\alpha\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^4 - r_a^4}{r^4 r_a^4} \right) \end{aligned}$$

d) Energie, Kräfte und Momente

Kraftgesetz: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$

Gemäß dem Hinweis $W = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{s}$ ergibt sich die gesuchte Energie damit zu

$$\begin{aligned} \Delta W_e &= -q_4 \cdot \int_{3b}^{b} \vec{E}_a\, d\vec{s} \\ &= -\frac{q_4 k}{4\alpha\varepsilon_0} \cdot \int_{3b}^{b} \frac{1}{r^2 r_a^4} - \frac{1}{r^6}\, dr \\ &= \frac{q_4 k}{4\alpha\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r r_a^4} - \frac{1}{5r^5} \right]_{3b}^{b} \\ \Rightarrow \Delta W_e &= \frac{q_4 k}{4\alpha\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{3b r_a^4} - \frac{1}{5b^5} + \frac{1}{5(3b)^5} \right) \end{aligned}$$

e) Elektrische Energie

Die Feldenergiedichte für lineare, isotrope Medien berechnet sich zu

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon \vec{E}^2$$

und für die elektrische Energie gilt allgemein

$$W_e = \int w_e dv$$

Im Bereich $r \geq r_a$ folgt daraus

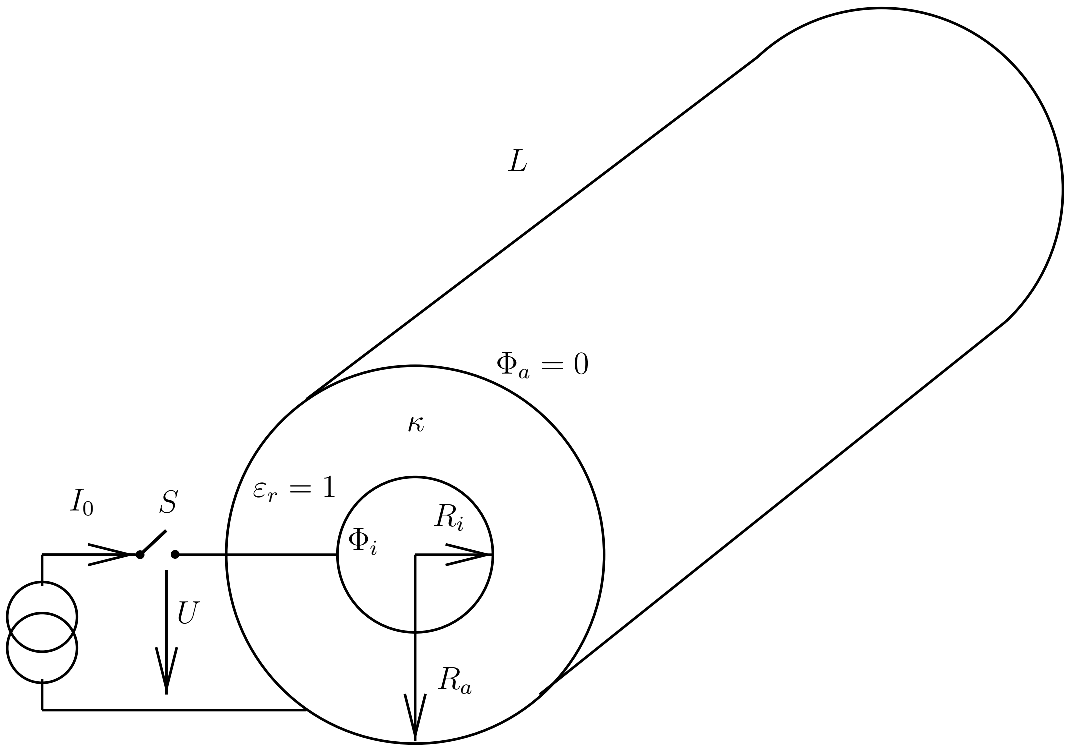
$$\begin{aligned}
W_{e,a} &= \int_{r_a}^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\varepsilon_a \cdot E_{r,a}^2 \cdot r'^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr' \\
&= \int_{r_a}^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\varepsilon_a \cdot \left(E_0 \cdot \frac{1}{r'} \cdot e^{-r'}\right)^2 \cdot r'^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr' \\
&= 2\pi\varepsilon_a E_0 \cdot \int_{r_a}^{r} e^{-2r'}\, dr' \\
&= 2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 E_0 \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-2r}\right]_{r_a}^{r} \\
\Rightarrow W_{e,a} &= \pi\varepsilon_r\varepsilon_0 E_0 \cdot \left(e^{-2r_a} - e^{-2r}\right)
\end{aligned}$$

Die Gesamtenergie für $r \geq r_a$ ergibt sich dann zu $W_{ges,a} = \lim\limits_{r\to\infty} W_{e,a}(r)$.

$$\Rightarrow W_{ges} = \pi\varepsilon_r\varepsilon_0 E_0 \cdot e^{-2r_a}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben ist ein Zylinderkondensator.



Die innere Elektrode des Kondensators mit dem Potential $\Phi_i = U$ befinde sich bei R_i, die äußere Elektrode mit dem Potential $\Phi_a = 0$ bei R_a. Beide Elektroden besitzen eine unendlich hohe Leitfähigkeit. Der Zwischenraum ist mit einem Dielektrikum mit der Dielektrizität $\varepsilon = \varepsilon_0$ gefüllt. Der Kondensator hat die Länge L. Randeffekte seien vernachlässigbar.

Zunächst sei der Kondensator mit einem nichtleitenden Material ($\kappa = 0$) gefüllt und der Schalter S geöffnet ($I_0 = 0$).

a) Berechnen Sie mit der Laplacegleichung das elektrische Potential Φ und bestimmen Sie dabei alle freien Parameter anhand der gegebenen Randbedingungen.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ zwischen beiden Zylindern als Funktion der Spannung U.

c) Bestimmen die Ladung auf der inneren Elektrode Q_i und der äußeren Elektrode Q_a.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von a) bis c).

Von nun an sei die Leitfähigkeit des Dielektrikums im Zwischenraum winkelabhängig:

$$\kappa(\varphi) = \kappa_0 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Der Schalter S sei nun geschlossen und die Stromquelle liefert einen konstanten Strom $I_0 = \frac{2Q\kappa_0}{\pi\varepsilon_0}$, der durch den Kondensator fließt.

d) Berechnen Sie anhand des gegebenen Stroms I_0 das elektrische Feld $\vec{E}$ in Abhängigkeit von der Ladung Q.

e) Bestimmen Sie die Stromdichte $\vec{J}(R, \varphi)$ und die Verlustleistungsdichte $\frac{dw_j}{dt}$ in Abhängigkeit von der Ladung Q.

Lösung 2 (16 Punkte)

a) Wegen der Symmetrie und Vernachlässigung von Randeffekten gilt $\Phi = \Phi(r)$ und $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

$$\Delta\Phi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{C_1}{R}$$
$$\Phi(R) = C_1 \ln(R) + C_2$$

Es gelten folgende Randbedingungen:

$$\Phi(R_i) = U \text{ und } \Phi(R_a) = 0$$
$$0 = C_1 \ln(R_a) + C_2$$
$$U = C_1 \ln(R_i) + C_2$$

$$\Rightarrow U = C_1(\ln(R_i) - \ln(R_a))$$
$$C_1 = \frac{U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)}$$
$$\Rightarrow C_2 = -\frac{U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)}\ln(R_a)$$

$$\Phi(R) = \frac{U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)}\ln(R) - \frac{U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)}\ln(R_a)$$

b)

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}\,\vec{e}_R = -\frac{U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)}\frac{1}{R}\,\vec{e}_R$$

c) Zur Bestimmung der Ladungen auf den Elektroden werden zunächst die entsprechenden Flächenladungsdichten mit $\sigma = D_{n_2} - D_{n_1}$ berechnet.

$$\sigma_i = \quad D(R_i) = -\frac{\varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right) R_i}$$
$$\sigma_a = -D(R_a) = \quad \frac{\varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right) R_a}$$

Die Ladung ergibt sich wegen $Q_i = \iint \sigma_i R \; d\varphi \, dz$ aus der Multiplikation der Ladungsdichte mit der Fläche der inneren bzw. äußeren Elektrode

$$Q_i = A_i \cdot \sigma_i = -2\pi R_i L \cdot \frac{\varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right) R_i} = -\frac{\varepsilon_0 2\pi L}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)} U$$
$$Q_a = A_a \cdot \sigma_a = \quad 2\pi R_a L \cdot \frac{\varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right) R_a} = \quad \frac{\varepsilon_0 2\pi L}{\ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)} U$$

d) Wegen der Symmetrie und Vernachlässigung von Randeffekten gilt $\Phi = \Phi(r)$ und $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. Es gilt:

$$I_0 = \iint \vec{J}(R,\varphi) d\vec{f} = \iint \kappa(\varphi)\vec{E} d\vec{f}$$

$$\Rightarrow \frac{2Q\kappa_0}{\pi\varepsilon_0} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \kappa_0 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) E_R(R) \cdot R \, d\varphi \, dz$$
$$\frac{2Q\kappa_0}{\pi\varepsilon_0} = E_R(R) \cdot \kappa_0 RL \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \, d\varphi$$
$$\frac{2Q\kappa_0}{\pi\varepsilon_0} = E_R(R) \cdot 4\kappa_0 RL$$
$$\Rightarrow E_R(R) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 RL} \quad \Rightarrow \vec{E} = E_R(R) \, \vec{e}_R$$

e)

$$\vec{J}(R,\varphi) = \kappa(\varphi)\vec{E}$$
$$\vec{J}(R,\varphi) = \kappa_0 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 RL} \, \vec{e}_R$$

Die Verlustleistungsdichte ist gegeben durch:

$$\frac{dw_j}{dt} = \vec{J}\vec{E}$$
$$= \kappa(\varphi)\vec{E}^2$$
$$= \kappa_0 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 RL}\right)^2$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben sei eine ringförmige Toroidspule mit N Windungen, innerem Radius c und der Kantenlänge a des quadratischen Spulenquerschnitts. Durch den Draht der Spule fließt der Strom I. Es gilt $\mu = \mu_0$. Randeffekte können vernachlässigt werden.

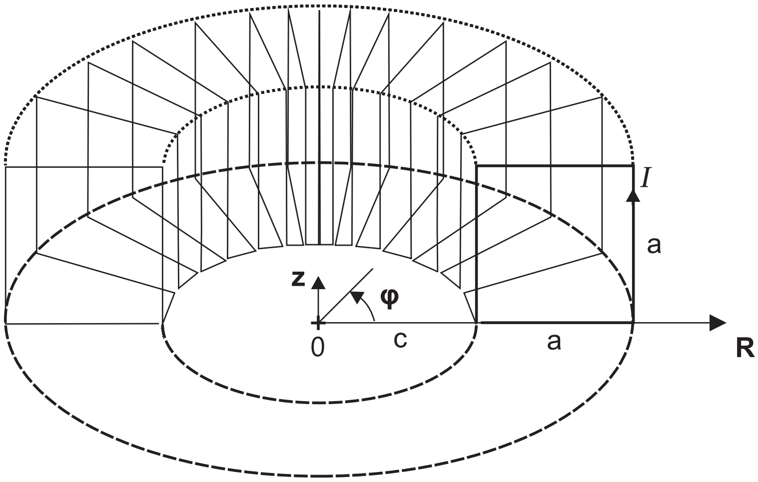


Abbildung 3: Toroidspule mit quadratischem Querschnitt. Ansich von schräg oben.

a) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ innerhalb der Spule, d.h. für alle $R \in (c, c+a)$. Skizzieren Sie $\vec{B}$ in Abbildung 4.

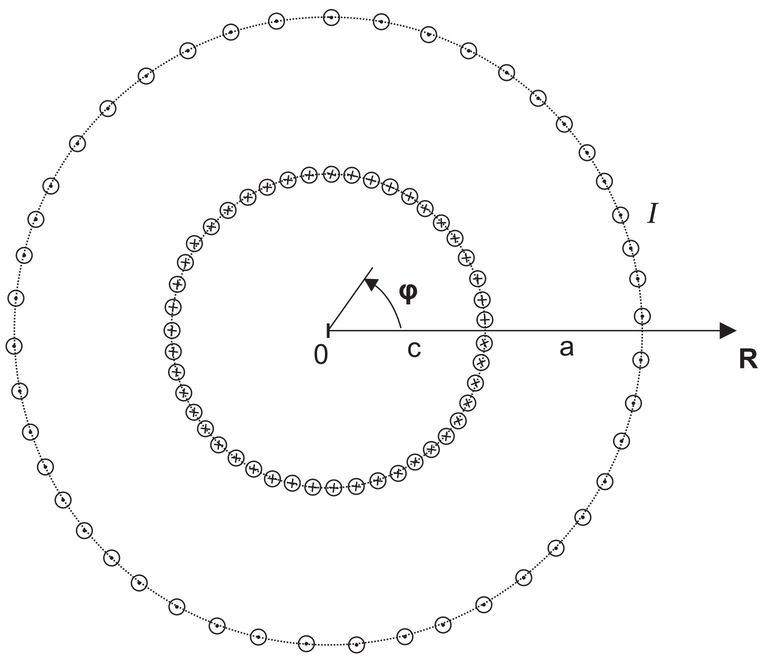


Abbildung 4: Toroidspule: Ansicht von oben

b) Berechnen Sie die Feldenergie W_m des magnetischen Feldes im Inneren der Spule. Bestimmen Sie mit Hilfe der berechneten Feldenergie den Selbstinduktionskoeffizienten L.

Nun wird eine rechteckige Leiterschleife in die Toroidspule eingebracht. Diese wird, beginnend am inneren Rand, mit der Geschwindigkeit v in radialer Richtung zum äußeren Rand bewegt (siehe Abbildung 5). Die Leiterschleife hat den Widerstand R_L, eine Breite von $\frac{a}{3}$ und eine Höhe von $\frac{a}{2}$ und verlässt während der gesamten Zeit die Toroidspule nicht.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass der in der Leiterschleife induzierte Strom den Stromkreis und das Magnetfeld der Toroidspule nicht beeinflusst.

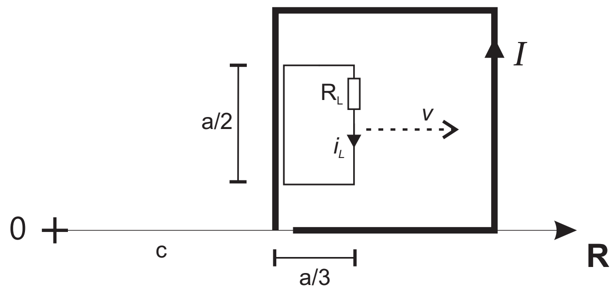


Abbildung 5: Leiterschleife in Toroidspule

c) Berechnen Sie den magnetischen Fluss $\phi_m(t)$ durch die Leiterschleife. Wie in Abbildung 5 dargestellt, befindet sich die Leiterschleife zum Zeitpunkt $t = 0$ am inneren Rand der Toroidspule.

d) Berechnen Sie den in der Leiterschleife induzierten Strom $i_L(t)$.

e) Nun werde das Feld *außerhalb* der Toroidspule betrachtet. Skizzieren Sie den Verlauf der magnetischen Feldlinien in Abbildung 6 und bestimmen Sie das Integral $\oint \vec{H} d\vec{s}$ entlang einer der Feldlinien.

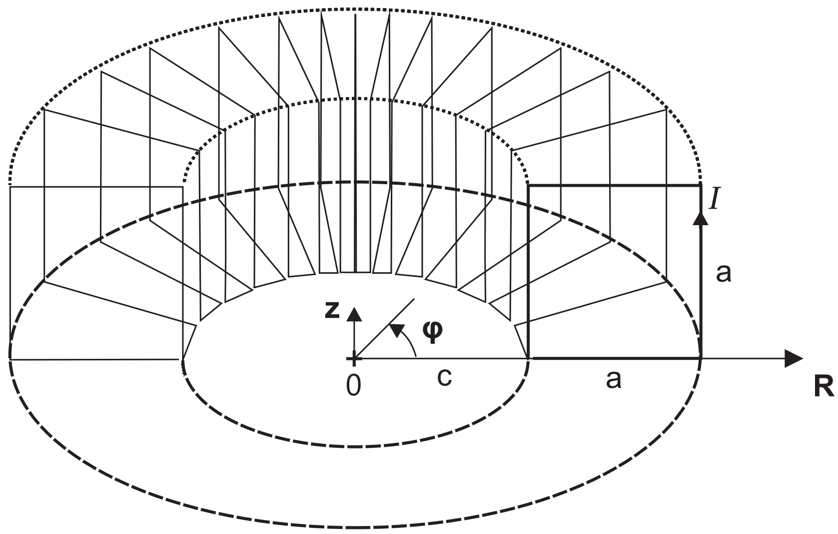


Abbildung 6: Toroidspule, Ansicht von schräg oben.

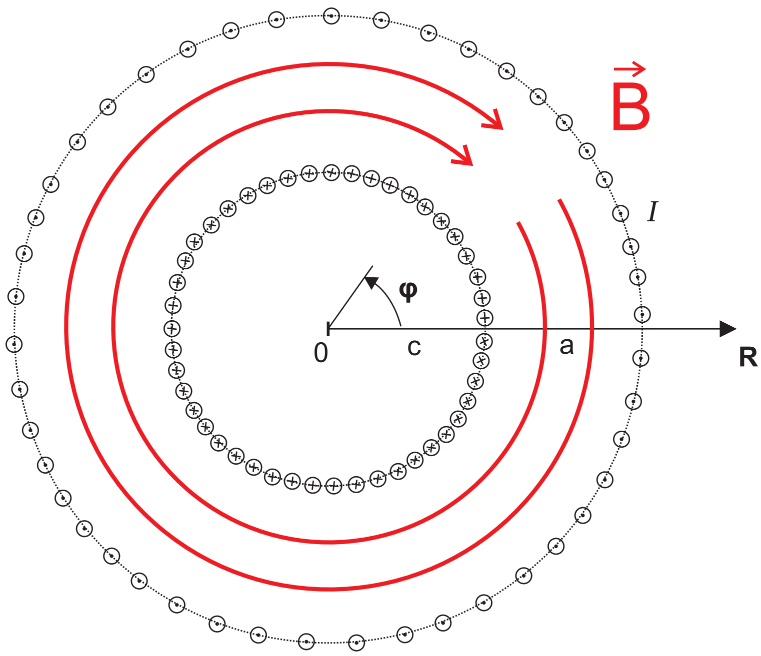
Lösung 3 (16 Punkte)

a) Mit dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{J} d\vec{f}$ ergibt sich

$$\vec{H} \cdot 2\pi R \vec{e}_\varphi = -NI$$

Somit ergibt sich für die magnetische Flussdichte für $R \in (c, c+a)$

$$\vec{B} = -\mu_0 \frac{NI}{2\pi R} \vec{e}_\varphi$$



b) Die Feldenergie ergibt sich zu

$$\begin{aligned} W_m &= \int w_m dv \\ &= \int \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} dv \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{NI}{2\pi R} \right)^2 R dR d\varphi dz \\ &= \frac{1}{2} a \mu_0 \frac{N^2 I^2}{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{1}{R} dR \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} a N^2 I^2 \ln \left(\frac{c+a}{c} \right) \end{aligned}$$

Der Selbstinduktionskoeffizient L ergibt sich durch Koeffizientenvergleich mit

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

zu

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} a N^2 \ln\left(\frac{c+a}{c}\right)$$

c) Der magnetische Fluss durch die Leiterschleife für $t \in (0, \frac{2a}{3v})$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Phi_m(t) &= \iint \vec{B} d\vec{f} \\
&= \int\limits_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \int\limits_{c+vt}^{c+\frac{a}{3}+vt} -\mu_0 \frac{NI}{2\pi R} \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi dR dz \\
&= -\mu_0 \frac{aNI}{4\pi} \ln\left(\frac{c+\frac{a}{3}+vt}{c+vt}\right)
\end{aligned}$$

d) Der in der Leiterschleife induzierte Strom ergibt sich gemäß dem Ohmschen Gesetz zu

$$i_L(t) = -\frac{U_{L,ind}(t)}{R_L}.$$

Der Grund für das Vorzeichen ist die in der Skizze eingezeichnete Stromrichtung.

Die in der Leiterschleife induzierte Spannung ist gegeben durch

$$U_{L,ind}(t) = -\frac{d\Phi_m(t)}{dt}.$$

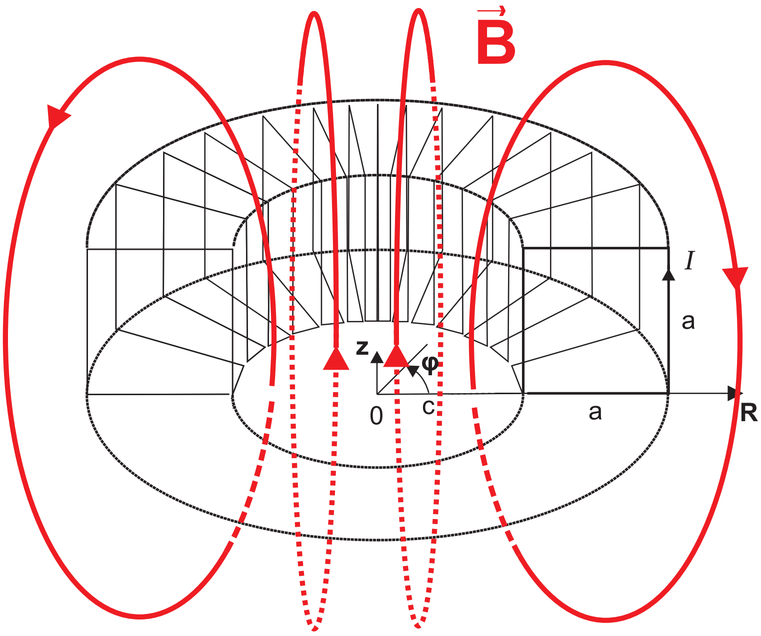
Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= -\mu_0 \frac{aNI}{4\pi R_L} \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{c+\frac{a}{3}+vt}{c+vt}\right) \\
&= -\mu_0 \frac{aNI}{4\pi R_L} \cdot \frac{c+vt}{c+\frac{a}{3}+vt} \cdot \frac{v\cdot(c+vt) - v\cdot(c+\frac{a}{3}+vt)}{(c+vt)^2} \\
&= -\mu_0 \frac{aNI}{4\pi R_L} \cdot \frac{v}{c+\frac{a}{3}+vt} \cdot \frac{-\frac{a}{3}}{(c+vt)} \\
&= \mu_0 \frac{a^2NI}{12\pi R_L} \cdot \frac{v}{(c+vt)(c+\frac{a}{3}+vt)}
\end{aligned}$$

für $t \in (0, \frac{2a}{3v})$.

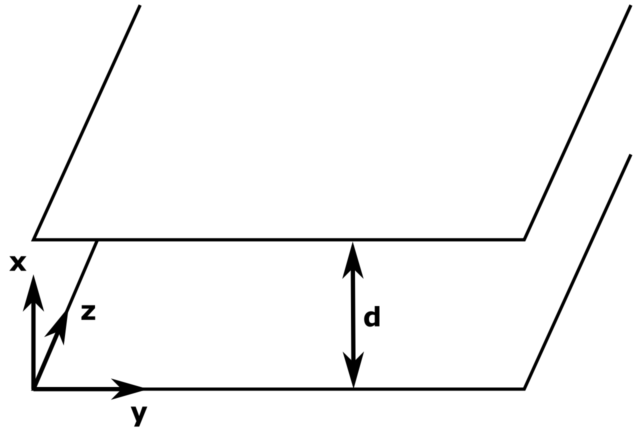
e) Das äußere Feld entspricht etwa dem Feld einer einzelnen (Windungszahl N = 1) runden Leiterschleife, da in der Toroidspule der Strom I kreisförmig in φ-Richtung fließt. Somit folgt mit dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I.$$



Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben ist ein Wellenleiter, der aus zwei parallelen, leitenden Platten besteht. Die Platten sind in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnt und haben den Abstand d. Im Raum zwischen den Platten befindet sich Vakuum.



In z-Richtung breitet sich zwischen den Platten eine TM-Welle aus. Das E-Feld der Welle ist gegeben durch:

$$E_z = \sin(k_x x)\, e^{j(\omega t - k_z z)},$$
$$E_x = -j\frac{k_z}{k_x}\cos(k_x x)\, e^{j(\omega t - k_z z)}.$$

Lösen Sie folgende Aufgaben:

a) Leiten Sie aus den MAXWELL-Gleichungen die Berechnungsvorschrift für das B-Feld der TM-Welle her. Berechnen Sie anschließend mit Ihrer hergeleiteten Rechenvorschrift das B-Feld der TM-Welle.

b) Welche Bedingung müssen für k_x gelten? Erläutern Sie deren physikalische Bedeutung. Stellen Sie alle gültigen Lösungen mathematisch dar!

c) Berechnen Sie k_z als Funktion von ω und k_x und setzen Sie Ihr Ergebnis für k_x aus Aufgabe b) ein. Für die Berechnung gilt die Wellengleichung $\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0$ beziehungsweise $\Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{d^2\vec{H}}{dt^2} = 0$.

d) Bestimmen Sie die CutOff-Frequenz der ersten Mode, wenn der Abstand d zwischen den beiden Platten $d = 15\,\mathrm{cm}$ beträgt. Nehmen Sie dazu die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ an.

Lösung 4 (16 Punkte)

a) **Bestimmung des B-Feldes**

Das B-Feld wird aus dem E-Feld berechnet. Die einzelnen Komponenten des E-Feldes sind in der Aufgabenstellung gegeben:

$$E_z = \sin(k_x x)\, e^{j(\omega t - k_z z)},$$
$$E_x = -j\frac{k_z}{k_x}\cos(k_x x)\, e^{j(\omega t - k_z z)}.$$

Aus der Rotation des E-Feldes lässt sich die negative zeitliche Ableitung des B-Feldes bestimmen:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Für die die Rotation des E-Feldes ergibt sich:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

Es gilt für die einzelnen Terme des ersten und letzten Summanden:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Somit ergibt sich für die Rotation des E-Feldes:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{E} &= \vec{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\\ &= \vec{e}_y\left(j^2\frac{k_z^2}{k_x}\cdot\cos(k_x x)\cdot e^{j(\omega t - k_z z)} - k_x\cdot\cos(k_x x)\cdot e^{j(\omega t - k_z z)}\right)\\ &= -\vec{e}_y\left(\frac{k_z^2}{k_x} + k_x\right)\cdot\cos(k_x x)\, e^{j(\omega t - k_z z)}.\end{aligned}$$

Durch Integration über die Zeit t und anschließende Multiplikation mit -1 ergibt sich das B-Feld zu

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{e}_y\frac{1}{j\omega}\cdot\left(k_x + \frac{k_z^2}{k_x}\right)\cos(k_x x)\, e^{j(\omega t - k_z z)}\\ &= -\vec{e}_y\frac{j}{\omega}\cdot\left(k_x + \frac{k_z^2}{k_x}\right)\cos(k_x x)\, e^{j(\omega t - k_z z)}.\end{aligned}$$

b) **Bedingung für k_x**

Das E-Feld muss auf den leitenden Platten verschwinden, also zu Null gesetzt werden:

$E_z(x=0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$ Bedingung ist erfüllt, da $\sin(0) = 0$,

$E_z(x=d) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$ Bedingung ist erfüllt für $\sin(k_x d) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x = \frac{n\pi}{d}$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

c) **Berechnung von k_z**

Zur Berechnung der Wellenzahl k_z in Abhängigkeit von ω und k_x wird die z-Komponente der Wellengleichung $\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$ verwendet:

$$\Delta E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}.$$

Die vereinfachte Wellengleichung ergibt sich damit zu

$$\Rightarrow \Delta E_z - \mu\varepsilon\frac{d^2 E_z}{dt^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Auflösen führt zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} && + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} && - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \\ &= -k_x^2 \sin\left(k_x x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} && - k_z^2 \sin\left(k_x x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} && + \mu\varepsilon\omega^2 \sin\left(k_x x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\ &= -k_x^2 && - k_z^2 && + \mu\varepsilon\omega^2. \end{aligned}$$

Für k_z ergibt sich damit

$$k_z = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 - k_x^2} = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

d) **Bestimmung der CutOff-Frequenz**

Einsetzen von $k_z = 0$ in die Lösung aus Aufgabenteil c) liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \\ \mu\varepsilon\omega^2 &= \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \\ \omega &= \frac{n\pi}{d\cdot\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{n\pi c_0}{d}. \end{aligned}$$

Mit $\omega = 2\pi f$ ergibt sich

$$f = \frac{nc_0}{2d}.$$

Das Einsetzen von $n = 1$, $c_0 = 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $d = 15\,\mathrm{cm}$ liefert eine Frequenz von

$$f = \frac{1\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\cdot 15\cdot 10^{-2}\mathrm{m}} = \frac{3}{2\cdot 15}\cdot\frac{10^8}{10^{-2}}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 1\cdot 10^{-1}\cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{GHz}.$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Eine elektromagnetische Welle mit dem $\vec{E}$-Feld der Form

$$\vec{E}_e = E_e e^{j(\omega t - k_0 z)}(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)$$

breitet sich in positive z-Richtung im Vakuum ($z < 0$) aus und trifft bei $z = 0$ auf einen Bereich mit dünnem Plasma ($z > 0$). Im Plasma gelte $\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}$. ω_c sei die Plasmakreisfrequenz. Im ganzen Raum gelte $\mu = \mu_0$.

a) Wie ist die Welle im Vakuum polarisiert? Geben Sie eine kurze Begründung an.

b) Berechnen Sie das $\vec{H}$-Feld der hinlaufenden Welle mittels der allgemeinen MAXWELL-Gleichung. Stellen Sie die Beziehung zwischen dem $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Feld mittels des Wellenwiderstandes $\Gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ her.

Hinweis: Machen Sie für die weiteren Aufgabenteile c) bis e) den Ansatz für das $\vec{E}$-Feld der transmittierten im dünnen Plasma:

$$\vec{E}_t = E_t e^{j(\omega t - k_1 z)}(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)$$

c) Geben Sie die Grenzbedingungen an der Grenzfläche bei $z = 0$ an. Berechnen Sie daraus die $\vec{H}$-Felder, der an der Grenzfläche reflektierten und transmittierte Welle in Abhängigkeit von E_e.

d) Berechnen Sie k_1 im Plasma mit der allgemeinen Wellengleichung. Geben Sie k_1 für die Fälle $\omega > \omega_c$ und $\omega < \omega_c$ an.

e) Berechnen Sie für $\omega > \omega_c$ den komplexen Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*$ in Abhängigkeit von E_t im dünnen Plasma.

Lösung 5 (16 Punkte)

a) Die Welle ist zirkular polarisiert. Die $\vec{e}_x$ und die $\vec{e}_y$ Komponente sind um $-j = e^{-j\pi/2}$, d.h. um $90°$ phasenverschoben und die Beträge der Amplituden $|E_x|$ und $|E_y|$ sind identisch.

b)

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \tag{1}$$

$$\vec{e}_x\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -j\omega\mu_0\vec{H} \tag{2}$$

$$(-jk_0)\left[\vec{e}_x\left(jE_e e^{j(\omega t-k_0 z)}\right) + \vec{e}_y\left(E_e e^{j(\omega t-k_0 z)}\right)\right] = -j\omega\mu_0\vec{H}_e \tag{3}$$

$$\frac{k_0}{\omega\mu_0}E_e e^{j(\omega t-k_0 z)}(j\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{H}_e \tag{4}$$

$$\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\omega\mu_0}E_e e^{j(\omega t-k_0 z)}(j\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{H}_e \tag{5}$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_e}_{H_e} e^{j(\omega t-k_0 z)}(j\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{H}_e \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

c) Die Tagentialkomponenten der Summe aller $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Felder an der Grenzfläche $z = 0$ müssen identisch sein:

$$E_e + E_r = E_t \tag{8}$$

$$H_e + H_r = H_t \tag{9}$$

$$\Gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{10}$$

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)}} \tag{11}$$

$$H_e + H_r = H_t \tag{12}$$

$$\Gamma_0 H_e - \Gamma_0 H_r = \Gamma_1 H_t \tag{13}$$

Elimination von H_t:

$$\Gamma_0 H_e - \Gamma_0 H_r = \Gamma_1 H_e + \Gamma_1 H_r \tag{14}$$

$$H_e\left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right) - H_r\left(\Gamma_0 + \Gamma_1\right) = 0 \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Aufgelöst nach H_r:

$$H_r = H_e \frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \tag{17}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_r = \frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \frac{1}{\Gamma_0} E_e e^{j(\omega t + k_0 z)} (j\vec{e}_x + \vec{e}_y) \tag{18}$$

und daraus Bestimmung von H_t:

$$H_t = \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 + \Gamma_1} H_e \tag{19}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_t = \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \frac{1}{\Gamma_0} E_e e^{j(\omega t - k_1 z)} (j\vec{e}_x + \vec{e}_y) \tag{20}$$

d) k_1 kann durch Einsetzen von E_x in die Wellengleichung berechnet werden.

$$\Delta E_x + \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu E_x = 0 \tag{21}$$

$$(-jk_1)^2 E_x + \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu E_x = 0 \tag{22}$$

$$-k_1^2 + \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu = 0 \tag{23}$$

$$k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu \tag{24}$$

mit

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \tag{25}$$

$$k_1^2 = \varepsilon_0 \mu (\omega^2 - \omega_c^2) \tag{26}$$

$\omega > \omega_c$:

$$k_1 = \pm\sqrt{\varepsilon_0 \mu (\omega^2 - \omega_c^2)} \tag{27}$$

Im Fall einer Ausbreitung in positive z-Achse, wie in Aufgabe gegeben:

$$k_1 = +\sqrt{\varepsilon_0 \mu (\omega^2 - \omega_c^2)} \tag{28}$$

$\omega < \omega_c$:

$$k_1 = \pm j\sqrt{\varepsilon_0 \mu (\omega_c^2 - \omega^2)} \tag{29}$$

Im Falle einer Ausbreitung in positive z-Achse (reine Dämpfung)

$$k_1 = -j\sqrt{\varepsilon_0 \mu (\omega_c^2 - \omega^2)} := -j\, k_I \tag{30}$$

e)

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \tag{31}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} E_t e^{j(\omega t - k_1 z)} (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \times \left[H_t e^{j(\omega t - k_1 z)} (j\vec{e}_x + \vec{e}_y) \right]^* \tag{32}$$

mit $H_t = \frac{E_t}{\Gamma_1}$ folgt:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} E_t^2 \frac{1}{\Gamma_1} (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \times (-j\vec{e}_x + \vec{e}_y) \tag{33}$$

$$\vec{S} = \frac{E_t^2}{2\Gamma_1} (1+1) \vec{e}_z \tag{34}$$

$$\vec{S} = \frac{E_t^2}{\Gamma_1} \vec{e}_z \tag{35}$$