Aufgabe 1 (16 Punkte)

Eine auf dem Koordinatenursprung zentrierte, nichtleitende Kugel mit dem Radius r_a und der Ladungsdichte $\varrho_a = \frac{\varrho_0 \cdot k}{r^2}$ wird von einer Kugelschale aus einem unendlich gut leitenden Metall mit dem Radius r_b und der Ladung Q_b umschlossen. Es gelte $\varepsilon = \varepsilon_0$ im ganzen Raum. Die kugelsymmetrische Anordnung ist in Abbildung 1 dargestellt.

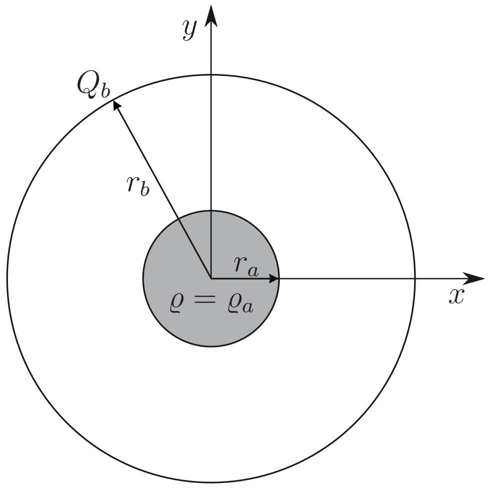


Abbildung 1: Kugelsymmetrische Versuchsanordnung

a) Die Anordnung werde zunächst aus großer Entfernung betrachtet, d.h. $r \gg r_b$. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{E}$ in der xy-Ebene.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ im gesamten Raum, d.h. für $0 \leq r < \infty$.

c) Berechnen Sie das elektrische Potential Φ im gesamten Raum unter der Annahme $\Phi(\infty) = 0$.

d) Berechnen Sie die Flächenladungsdichte σ_b auf der Leiteroberfläche bei $r = r_b$.

Gegeben ist nun folgende Anordnung, siehe Abbildung 2:
Eine Metallkugel mit Radius r_c und Flächenladungsdichte σ_c ist über einen dünnen leitfähigen Draht mit einer zweiten Metallkugel mit Radius r_d verbunden. Effekte durch den Draht können vernachlässigt werden.

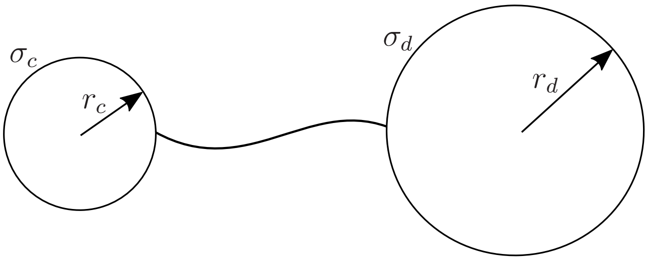


Abbildung 2: Versuchsanordnung aus zwei Metallkugeln

e) Beide Kugeln seien sehr weit voneinander entfernt, sodass die Flächenladungsdichten auf den Metallkugeln konstant sind. Berechnen Sie die Flächenladungsdichte σ_d. Begründen Sie Ihren Ansatz physikalisch.
Hinweis: Für eine Punktladung gelten $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \vec{e}_r$ und $\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$.

f) Der Draht wird nun entfernt, ferner sei die Gesamtladung der linken Metallkugel größer null ($Q_c > 0$) und die Gesamtladung der rechten Metallkugel neutral ($Q_d = 0$). Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien im gesamten Raum, wenn die beiden Kugeln nahe beisammen liegen, sich aber nicht berühren.

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Elektrisches Feld der Anordnung:

- radialsymmetrisch, nach außen gerichtet
- abnehmender Betrag

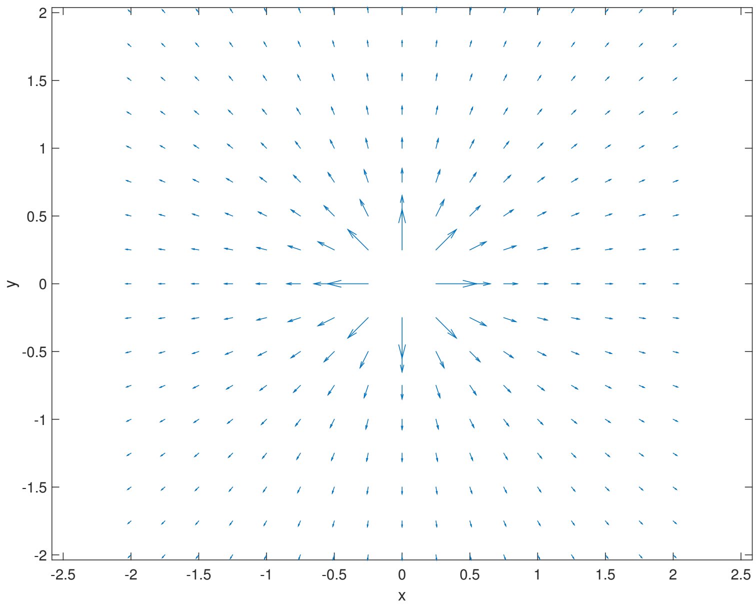


Abbildung 3: Kugelsymmetrische Versuchsanordnung

b) $\vec{E}$-Feld

Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{e}_r \;\Rightarrow d\vec{s} = \vec{e}_r \cdot dr$
Materialgleichung: $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \;\Rightarrow D_R = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot E_R$

Das $\vec{E}$-Feld wird mit $\oint \vec{D}\, d\vec{f} = \int \varrho\, dv$ (Satz von Gauss) berechnet:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon\, E_r \cdot r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varrho(r') \cdot r'^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr'$$

$0 \leq r < r_a$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon_0\, E_r \cdot r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi &= \int_0^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varrho_0 k \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr' \\
4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r &= 4\pi k \rho_0 r \\
\Rightarrow E_r &= \underbrace{\frac{k\rho_0}{\varepsilon_0}}_{k_1} \cdot \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$r_a \leq r < r_b$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon_0 E_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi &= 4\pi \cdot \left(\int_0^{r_a} \varrho_0 k \, dr' + \int_{r_a}^{r} 0 \, dr' \right) \\
4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r &= \underbrace{4\pi k \rho_0 r_a}_{Q_i} \\
\Rightarrow E_r &= \underbrace{\frac{k r_a \rho_0}{\varepsilon_0}}_{k_2} \cdot \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

$r_b \leq r < \infty$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon_0 E_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi &= Q_i + Q_b \\
4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r &= Q_i + Q_b \\
\Rightarrow E_r &= \underbrace{\frac{4\pi k \rho_0 r_a + Q_b}{4\pi \varepsilon_0}}_{k3} \cdot \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

c) Elektrisches Potential:

Skalarpotential (Elektrostatik): $\Phi_{el}(\vec{r}_2) - \Phi_{el}(\vec{r}_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{s}$

Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{e}_r \Rightarrow d\vec{s} = \vec{e}_r \cdot dr$

$r_b \leq r < \infty$:

$$\begin{aligned}
\Phi(r) - \underbrace{\Phi(\infty)}_{=0} &= -k_3 \int_{\infty}^{r} \cdot \frac{1}{r'^2} dr' \\
\Phi(r) &= k_3 \left[\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^{r} \\
\Rightarrow \Phi(r) &= k_3 \cdot \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$r_a \leq r < r_b$:

$$\begin{aligned}
\Phi(r) - \Phi(r_b) &= -k_2 \int_{r_b}^{r} \frac{1}{r'^2} dr' + \Phi(r_b) \\
&= k_2 \left[\frac{1}{r'} \right]_{r_b}^{r} + \Phi(r_b) \\
\Rightarrow \Phi(r) &= k_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} \right) + k_3 \cdot \frac{1}{r_b}
\end{aligned}$$

$0 \leq r < r_a$:

$$\begin{aligned}
\Phi(r) - \Phi(r_a) &= -k_1 \int_{r_a}^{r} \frac{1}{r'} dr' + \Phi(r_a) \\
&= -k_1 \left[\ln r'\right]_{r_a}^{r} + \Phi(r_a) \\
\Rightarrow \Phi(r) &= k_1 (\ln r_a - \ln r) + k_2 \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) + k_3 \cdot \frac{1}{r_b}
\end{aligned}$$

d) <u>Flächenladungsdichte:</u>

$$\begin{aligned}
Q_b &= \sigma_b \cdot A_b \\
\Rightarrow \sigma_b &= Q_b / 4\pi r_b^2
\end{aligned}$$

e) Es findet so lange Ladungsausgleich statt, bis beide Kugeln das gleiche Potential haben. Die Äquipotentialbedingung $\Phi_1 = \Phi_2$ führt unter Verwendung des Hinweis auf

$$\begin{aligned}
\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_c} &= \frac{Q_d}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_d} \\
\frac{4\pi r_c^2 \sigma_c}{r_c} &= \frac{4\pi r_d^2 \sigma_d}{r_d} \\
r_c \sigma_c &= r_d \sigma_d
\end{aligned}$$

Damit berechnet sich die gesuchte Flächenladungsdichte zu

$$\Rightarrow \sigma_d = \frac{r_c}{r_d} \cdot \sigma_c$$

f) Elektrische Feldlinien der Anordnung:

- von Q_c nach Q_d von der linken Seite
- aufgrund von Influenzladungen von Q_d nach rechts
- $\varphi = 90^\circ$ an der Kugeloberfläche

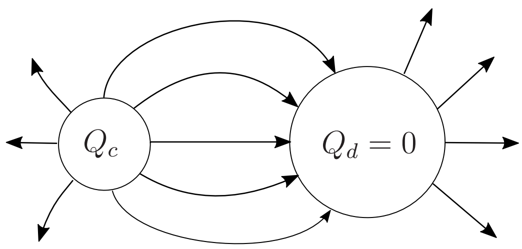


Abbildung 4: Feldlinien Dipol

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Koaxialkabel (siehe Abbildung 5) der Länge $L \gg R_i, R_a$. Die metallischen Innen- und Außenleiter liegen auf den bekannten Potentialen $\Phi(R_i) = \Phi_i = 0$ bzw. $\Phi(R_a) = \Phi_a > 0$. Das Dielektrikum besitzt die Materialkonstanten $\varepsilon = \text{const.}$ und $\kappa(R) = \frac{1}{a+bR}$ mit $a, b = \text{const.}$ Randeffekte seien vernachlässigbar.

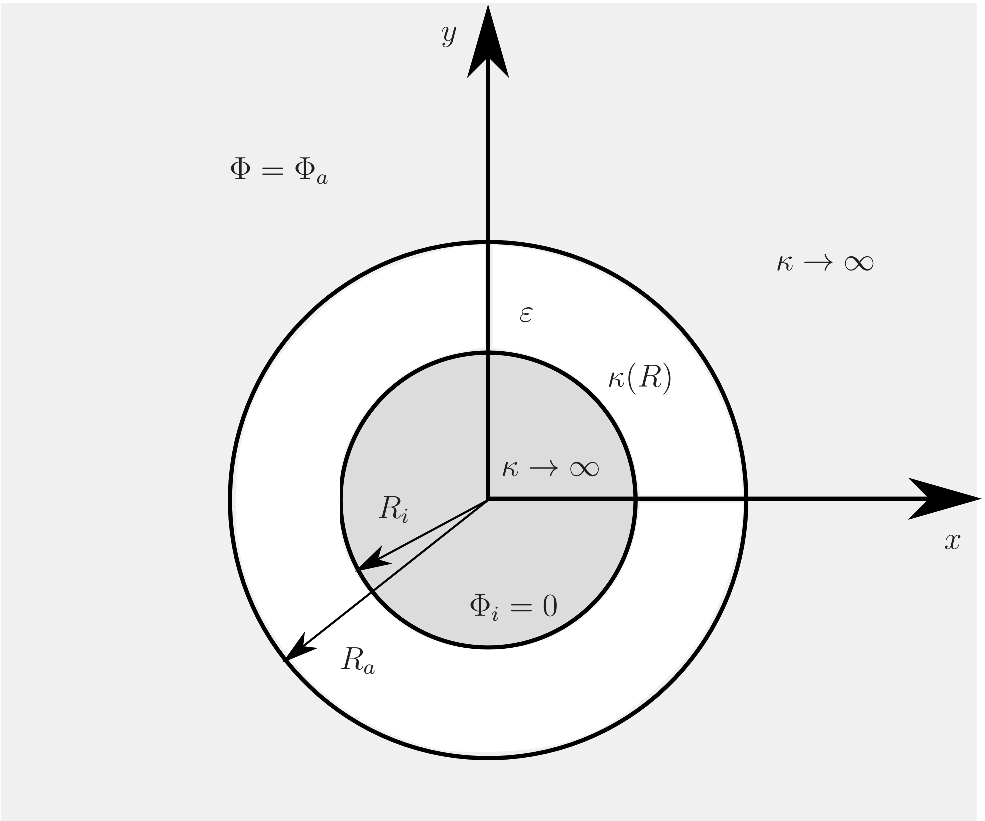


Abbildung 5: In z-Richtung ausgedehntes Koaxialkabel mit inneren Materialkonstanten ε und $\kappa(R)$.

a) Berechnen Sie für den stationären Fall die Stromdichte $\vec{J}$, die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, sowie die elektrische Verschiebungsdichte $\vec{D}$ innerhalb des Dielektrikums ($R_i < R < R_a$).

Hinweis: Nutzen Sie hierfür die Kontinuitätsgleichung der Ladung:

$$\text{div}\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0. \tag{1}$$

Die oben genannten Vektorfelder lassen sich bis auf einen freien Parameter C bestimmen.

b) Berechnen Sie nun das Potential $\Phi(R)$ und bestimmen Sie anhand der Randbedingungen den freien Parameter C.
Skizzieren Sie weiterhin das Potential für alle Bereiche.

c) Berechnen Sie die Raumladungsdichte ρ. Unter welcher Bedingung existiert eine Raumladungsdichte in $R_i < R < R_a$?

d) Berechnen Sie nun die Gesamtladung Q der Anordnung und den Gesamtstrom I, der durch das Dielektrikum fließt.

Lösung 2 (16 Punkte)

a) Stationärer Fall $\Rightarrow \text{div}\vec{J} = 0$.

Aus Symmetriegründen gilt $\vec{J} = J_R\vec{e}_R$, $\vec{D} = D_R\vec{e}_R$ und $\vec{E} = E_R\vec{e}_R$.

Es gilt also:

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{J} &= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R \cdot J_R(R) = 0 \\ &\Rightarrow R \cdot J_R(R) = C = \text{const.},\end{aligned}$$

bzw.:

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial}{\partial R}R \cdot J_R(R) &= \int 0 dR \\ \int J_R(R) + R \cdot \frac{\partial}{\partial R}J_R(R)dR &= C \\ \int J_R(R)dR + R \cdot J_R(R) - \int J_R(R)dR &= C \\ \Rightarrow R \cdot J_R(R) = C &= \text{const.},\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\vec{J} = \frac{C}{R}\vec{e}_R, \ \ \vec{E} = \frac{C}{\kappa(R) \cdot R}\vec{e}_R \ \text{ und } \ \vec{D} = \frac{\varepsilon C}{\kappa(R)}\vec{e}_R$$

b) Das Potential ergibt sich aus folgendem Zusammenhang:

$$\Phi(R) - \Phi(R_i) = -\int\limits_{R_i}^{R} \frac{C}{\kappa(R')R'}dR'$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\Phi(R) &= -\int\limits_{R_i}^{R} \frac{C(a + bR')}{R'}dR' \\ &= -C\left[a\ln(R') + bR'\right]_{R_i}^{R} \\ &= -C(a\ln(\frac{R}{R_i}) + b(R - R_i)).\end{aligned}$$

Somit lässt sich der freie Parameter mit:

$$C = -\frac{\Phi_a}{a\ln(\frac{R_a}{R_i}) + b(R_a - R_i)}$$

bestimmen.

Der Potentialverlauf für alle Bereiche ist in Abb. 6 qualitativ dargestellt.

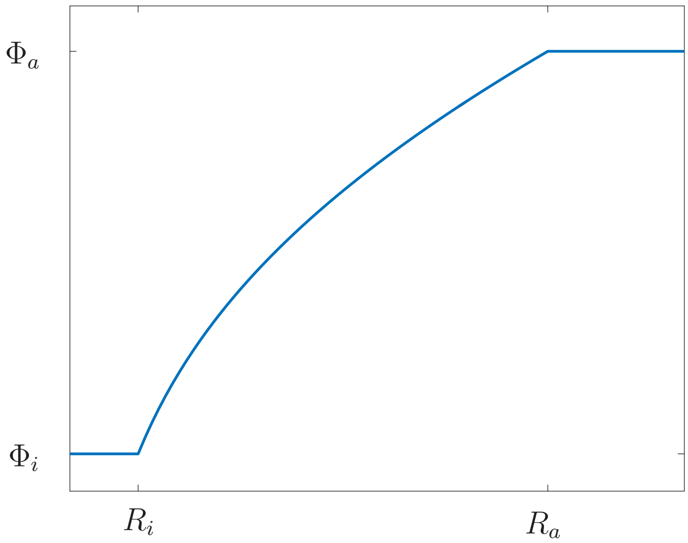


Abbildung 6: Radialer Potentialverlauf auf dem Koaxialkabel.

c) Die Raumladungsdichte:

$$\begin{aligned}\rho(R) = \text{div}\vec{D} &= \varepsilon\text{div}\vec{E}\\ &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial R}R\frac{C}{\kappa(R)\cdot R}\\ &= \varepsilon\frac{b\cdot C}{R}\end{aligned}$$

Damit existiert eine Raumladungsdichte im Inneren, falls $b \neq 0 \wedge C \neq 0$ gilt.

d) Für die Gesamtladung der Anordnung gilt: $Q_{ges} = Q_{R_i} + Q_{\text{innen}} + Q_{R_a}$.

$$\begin{aligned}Q_{R_i} &= \sigma_{R_i}\cdot 2\pi R_i L\\ &= \frac{\varepsilon C}{\kappa(R_i)}\cdot(2\pi R_i L)\\ &= \varepsilon C\cdot 2\pi R_i L(a+bR_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{\text{innen}} &= \oint \rho(R')dv\\ &= 2\pi L\int_{R_i}^{R_a} R'\rho(R')dR'\\ &= 2\pi L\varepsilon bC(R_a-R_i).\end{aligned}$$

$$Q_{R_a} = -\varepsilon C\cdot 2\pi R_a L(a+bR_a)$$

Der Strom durch das Dielektrikum:

$$\begin{aligned}I &= \int \vec{J}d\vec{f}\\ &= 2\pi LC.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben ist eine in x-Richtung ausgerichtete Zylinderspule mit der Länge l und mit dem Radius R_1, die N vom Strom $i_1(t)$ durchflossene Windungen besitzt. Die Windungen sind eng gewickelt und $l \gg R_1 \gg 2a$.

Innerhalb der Spule befindet sich eine Drahtschleife der Breite $2a$ und Höhe $2a$. An der Spitze bildet die Drahtschleife ein rechtwinkliges Dreieck. Die Drahtschleife ist um die z-Achse drehbar aufgehängt und schließt mit der x-Achse den Winkel $\varphi(t)$ ein. Es gilt $\varphi(t=0) = 0$.

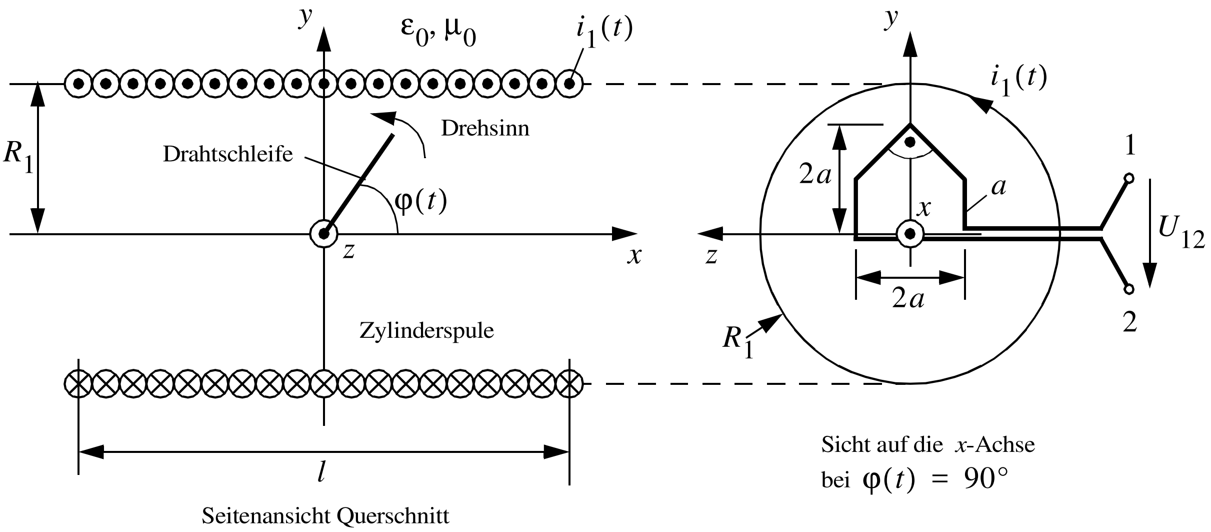


Abbildung 7: Lange, eng gewickelte Zylinderspule

a) 1. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ in der Ebene $z = 0$ im Inneren der Spule, wenn $i_1(t) = const > 0$ ist.
   2. Welche Komponenten H_x, H_y, H_z besitzt das $\vec{H}$-Feld auf der x-Achse im Innern der Spule?

b) Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}(t)$ im Inneren der Spule. (Vollständige Berechnung mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes)

c) Bestimmen Sie den magnetischen Fluß $\Phi(t)$ durch die Drahtschleife.

   Anmerkung: Sollten Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, dann nehmen Sie an, daß $H(t) = k \cdot i_1(t)$ ist.

d) Geben Sie die Gegeninduktivität $L_{12}(t)$ zwischen der Drahtschleife und der Spule an.

e) Berechnen Sie den Betrag der Spannung $U_{12}(t)$, die in der Drahtschleife für $\varphi(t) = \omega t$ und $i_1(t) = \hat{I}_0 \cdot \sin(\omega t)$ induziert wird.

f) Mit welcher Frequenz $f_{U_{12}}$ oszilliert die induzierte Spannung U_{12} ?

Lösung 3 (16 Punkte)

a) 1. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf der magnetischen Feldstärke $\vec{H}(t)$ in der Ebene $z = 0$ im Inneren der Spule, wenn $i_1(t) = const > 0$ ist.
2. Welche Komponenten H_x, H_y, H_z besitzt das $\vec{H}$-Feld auf der x-Achse im Innern der Spule?

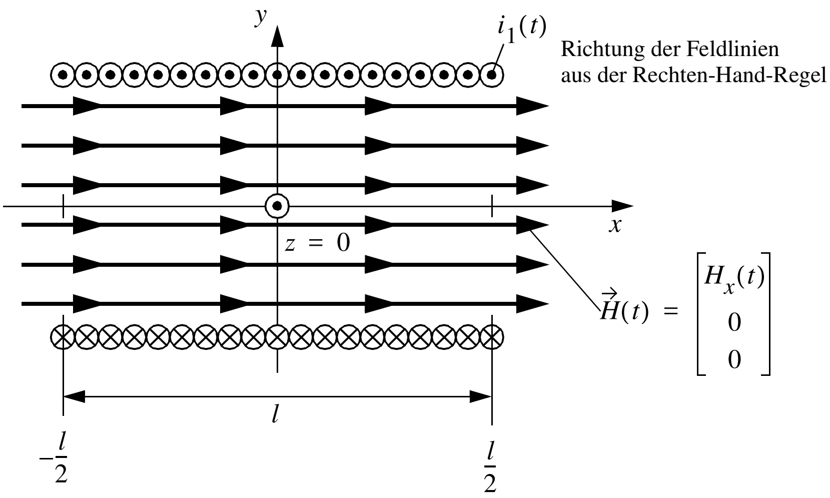


Abbildung 8: Feldverteilung in der Ebene $z = 0$ im Inneren der Spule.

Der Radius der Spule soll deutlich kleiner sein als die Länge. Daher ergibt sich im Inneren der Spule ein nahezu homogener H-Feldverlauf der nur eine Komponente $H_x(t)$ entlang der x-Achse aufweist $H_y = H_z = 0$.

b) Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}(t)$ im Inneren der Spule. (Vollständige Berechnung mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes)

Die Berechnung des $\vec{H}$-Feldes im Inneren der Spule erfolgt über das Durchflutungsgesetz:

$$\oint_s \vec{H}(t) \cdot d\vec{s} = \sum i$$

Der geschlossene Integrationsweg s umschließt alle N Windungen, die den Strom $i_1(t)$ führen.

$$\Rightarrow \sum i = N \cdot i_1(t)$$

Der Integrationsweg s lässt sich in einen Weg im Innern der Spule und einen Weg außerhalb der Spule aufteilen: $s = s_{innen} + s_{aussen}$, mit den jeweiligen differentiellen Wegelementen ds_i und ds_a. Das Durchflutungsgesetz liefert damit:

$$\int_{s_{aussen}} \vec{H}(t) \cdot d\vec{s}_a + \int_{s_{innen}} \vec{H}(t) \cdot d\vec{s}_i = N \cdot i_1(t)$$

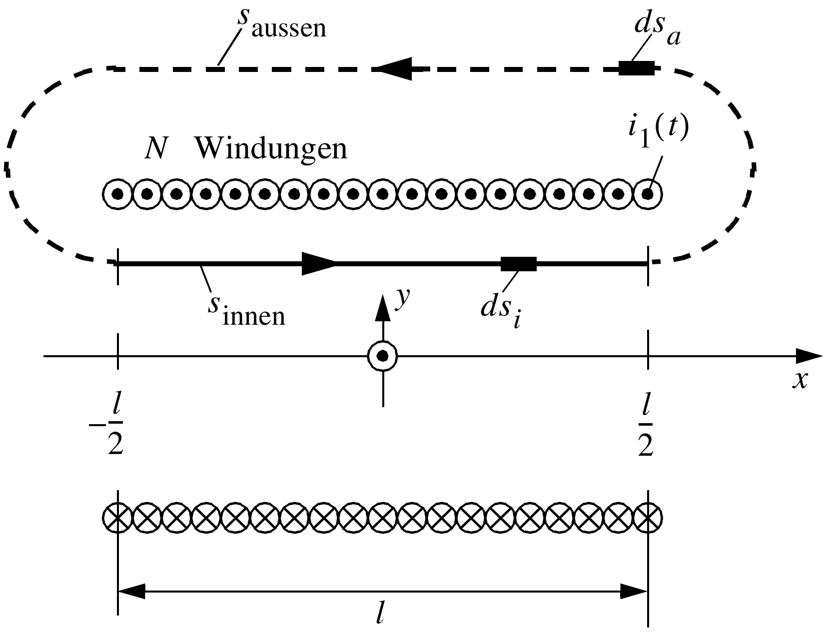


Abbildung 9: Umlaufweg für Durchflutungsgesetz.

Durch die enge Wicklung der Spule und die Vorgabe $l \gg R_1$ konzentriert sich ein homogenes H-Feld im Inneren der Spule. Der deutlich kleinere Beitrag außerhalb der Spule kann daher vernachlässigt werden:

$$\Rightarrow \int\limits_{s_{aussen}} \vec{H}(t) \cdot d\vec{s}_a \approx 0$$

Der Integrationsweg s_{innen} verläuft parallel zur x-Achse von $-l/2$ bis $+l/2$:

$$\Rightarrow d\vec{s}_i = dx \cdot \vec{e}_x$$

$$N \cdot i_1(t) = \int\limits_{s_{innen}} \vec{H}(t) \cdot d\vec{s}_i = \int\limits_{-l/2}^{+l/2} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_{-l/2}^{+l/2} H_x dx = H_x \cdot [x]_{-l/2}^{+l/2}$$

<u>Lösung</u>:

$$\vec{H}(t) = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \;\; mit \;\; H_x = \frac{N \cdot i_1(t)}{l}, \;\; H_y = H_z = 0$$

c) Bestimmen Sie den magnetischen Fluß $\Phi(t)$ durch die Drahtschleife (DS).

Aus Formelsammlung: Allgemein gilt für die Berechnung des magnetischen Fluß $\Phi(t)$ durch die Fläche F_{DS} der Drahtschleife:

$$\Phi(t) = \iint\limits_{F_{DS}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{f} = \iint\limits_{F_{DS}} |\vec{B}(t)| \cdot |d\vec{f}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{B}(t), d\vec{f})$$

mit

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \cdot \vec{H}(t) = \underbrace{\mu_0 \cdot \frac{N \cdot i_1(t)}{l}}_{|\vec{B}(t)|} \cdot \vec{e_x} \qquad und \qquad |d\vec{f}| = df$$

erhält man:

$$\Phi(t) = \iint\limits_{F_{DS}} \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i_1(t)}{l} \cdot df \cdot \cos\sphericalangle(\vec{e_x}, d\vec{f}) = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i_1(t)}{l} \underbrace{\iint\limits_{F_{DS}} df \cdot \cos\sphericalangle(\vec{e_x}, d\vec{f})}$$

projizierte Fläche $F_{DS}(t)$ der Drahtschleife, die senkrecht von $\vec{B}$ durchsetzt wird.

Die Gesamtfläche der dreieckförmigen Drahtschleife beträgt: $F_{DS} = 3a^2$
Die projizierte Fläche in Abhängigkeit von $\varphi(t)$ ergibt sich zu:

$$F_{DS}(t) = 3a^2 \cdot \sin(\varphi(t))$$

da gelten muss $F_{DS}(0) = 0$ und $F_{DS}(\varphi(t) = 90°) = 3a^2$

Lösung:

$$\Phi(t) = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i_1(t)}{l} \cdot 3a^2 \cdot \sin(\varphi(t))$$

Ersatzlösung:

$$\Phi(t) = \mu_0 \cdot k \cdot i_1(t) \cdot 3a^2 \cdot \sin(\varphi(t))$$

d) Geben Sie die Gegeninduktivität $L_{12}(t)$ zwischen der Drahtschleife und der Spule an.

$$L_{12} = \frac{\text{magnetischer Fluß durch die Drahtschleife}}{\text{flußverursachender Strom}} = \frac{\Phi(t)}{i_1(t)}$$

Lösung:

$$L_{12} = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i_1(t)}{l} \cdot 3a^2 \cdot \sin(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{i_1(t)} = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot 3a^2 \cdot \sin(\varphi(t))$$

Ersatzlösung:

$$L_{12} = \mu_0 \cdot k \cdot i_1(t) \cdot 3a^2 \cdot \sin(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{i_1(t)} = \mu_0 \cdot k \cdot 3a^2 \cdot \sin(\varphi(t))$$

e) Berechnen Sie den Betrag der Spannung $U_{12}(t)$, die in der Drahtschleife für $\varphi(t) = \omega t$ und $i_1(t) = \hat{I}_0 \cdot \sin(\omega t)$ induziert wird.

Nach dem Induktionsgesetz gilt:

$$U_{12}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 \frac{N \cdot i_1(t)}{l} \cdot 3a^2 \cdot \sin(\varphi(t))\right) = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 \frac{N \cdot \hat{I}_0 \cdot \sin(\omega t)}{l} \cdot 3a^2 \cdot \sin(\omega t)\right)$$

$$U_{12}(t) = -\frac{\mu_0 N \hat{I}_0 3a^2}{l} \cdot \frac{d}{dt} \sin^2(\omega t)$$

Ableiten mittels Kettenregel und Betragsbildung liefert die

<u>Lösung</u>:

$$|U_{12}(t)| = \left| -\frac{\mu_0 N \hat{I}_0 3a^2}{l} \cdot 2\omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \right| = \left| -\frac{\mu_0 N \hat{I}_0 3a^2}{l} \cdot \omega \cdot \sin(2\omega t) \right|$$

<u>Ersatzlösung</u>:

$$|U_{12}(t)| = \left| -\mu_0 k \hat{I}_0 3a^2 \cdot 2\omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \right| = \left| -\mu_0 k \hat{I}_0 3a^2 \cdot \omega \cdot \sin(2\omega t) \right|$$

f) Mit welcher Frequenz $f_{U_{12}}$ oszilliert die induzierte Spannung U_{12} ?

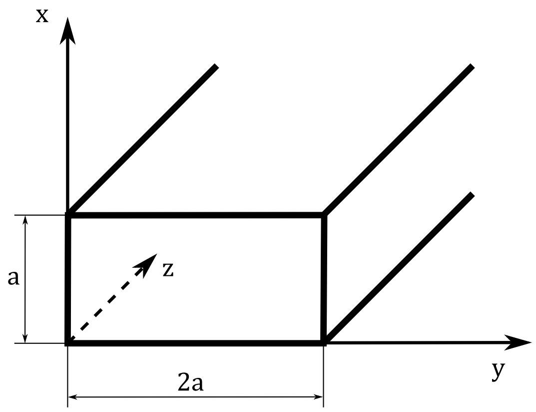
Die Spannung oszilliert mit der doppelten Frequenz:

$$2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \omega \cdot \sin(\underbrace{2\omega} \cdot t)$$

mit $\omega = 2\pi f \Rightarrow f_{U_{12}} = 2f$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Neben TE-Wellen (H_x, H_y, H_z, E_x, E_y) breiten sich in einem rechteckigen Wellenleiter in z-Richtung auch TM-Wellen (H_x, H_y, E_x, E_y, E_z) aus. Der Rechteckhohlleiter besteht an den Wänden aus unendlich gut leitendem Material. Im Innern befindet sich Vakuum. Er ist in y-Richtung $2a$ breit und hat in x-Richtung die Ausdehnung a.



Hinweis:

TM: $E_z = E_z^0\,(x,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)}$

TE: $H_z = H_z^0\,(x,y)\,e^{j(\omega t - k_z z)}$

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

a) Geben Sie die Randbedingungen für das $\vec{E}$-Feld auf den Leiterflächen für TM- und TE-Wellen an. Beschreiben Sie dabei die relevanten Positionen vollständig in allen drei Koordinaten.

Welche Begründung liegt für diese Ranbedingungen zugrunde? Begründen Sie anschaulich.

b) Zur Beschreibung der TM-Welle können Sie eine der beiden folgenden Funktionen wählen:

$$E_z^0 = A\sin(k_x x)\cdot\sin(k_y y)\,, \quad E_z^0 = B\cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y)\,.$$

und zur Beschreibung der TE-Welle gibt es die beiden folgenden Ansätze:

$$H_z^0 = C\cos(k_x x)\cdot\sin(k_y y)\,, \quad H_z^0 = D\cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y)\,,$$

- Wählen Sie für die TM-Welle und die TE-Welle je den passenden der beiden Ansätze aus und begründen Sie Ihre Auswahl ausführlich mathematisch.
- Welche Bedingungen müssen jeweils für k_x bzw. k_y erfüllt sein?

c) Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Frequenz ω für ein gegebenes k_z ausführlich her. Verwendem Sie hierfür eine der Lösungen aus Aufgabenteil b) und setzen Sie diese in die allgemein gültige Wellengleichung ein.

d) Welche Moden sind für die TE-Welle und die TM-Welle gültig, wenn k_z möglichst groß sein soll? Begründen Sie Ihre Aussage in Worten!

Hinweis: Es ist keine Rechnung erforderlich!

Lösung 4 (16 Punkte)

a) Randbedingungen für die TM-Welle:

$$E_z(0, y, z) = E_z(a, y, z) = E_z(x, 0, z) = E_z(x, 2a, z) = 0.$$

Randbedingungen für die TE-Welle:

$$E_y(0, y, z) = E_y(a, y, z) = E_x(x, 0, z) = E_x(x, 2a, z) = 0.$$

Den Randbedingungen liegt der Zusammenhang zugrunde, dass an den gut leitenden Rändern des Wellenleiters keine tangentialen Komponenten der elektrischen Feldstärke auftreten können. Dies wird an dem Zusammenhang $\vec{J} = \kappa\vec{E}$ deutlich: Durch die Annahme der beliebig guten Leitfähigkeit κ in der metallischen Berandung des Hohlleiters und aufgrund der Stetigkeitsbedingung muss $\vec{E}_{tangential} = 0$ sein.

b) TM-Welle:

$$E_z^0 = A\sin(k_x x)\cdot\sin(k_y y)$$

erfüllt die Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
E_z^0(0, y) &= A\sin(k_x\cdot 0) && \cdot\sin(k_y y) = 0\\
&\Rightarrow 0 && \cdot\sin(k_y y) = 0\\
E_z^0(a, y) &= A\sin(k_x a) && \cdot\sin(k_y y) \stackrel{!}{=} 0\\
&\Rightarrow \sin(k_x a) && \stackrel{!}{=} 0\\
&\Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} && \text{für } m = 1, 2, 3, ...
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E_z^0(x, 0) &= A\sin(k_x x) && \cdot\sin(k_y\cdot 0) = 0\\
&\Rightarrow A\sin(k_x x) && \cdot 0 = 0\\
E_z^0(x, 2a) &= A\sin(k_x x) && \cdot\sin(k_y\cdot 2a) \stackrel{!}{=} 0\\
&\Rightarrow \sin(k_y\cdot 2a) && \stackrel{!}{=} 0\\
&\Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{2a} && \text{für } n = 1, 2, 3, ...
\end{aligned}$$

TE-Welle:

$$H_z^0 = D\cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y)$$

erfüllt die Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
E_y \sim \frac{\partial H_z^0(0, y)}{\partial x} &= -Dk_x\sin(k_x\cdot 0) && \cdot\cos(k_y y) = 0\\
&= 0 && \cdot\cos(k_y y) = 0\\
E_y \sim \frac{\partial H_z^0(a, y)}{\partial x} &= -Dk_x\sin(k_x\cdot a) && \cdot\cos(k_y y) = 0\\
&\Rightarrow \sin(k_x\cdot a) \stackrel{!}{=} 0\\
&\Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} && \text{für } m = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}$$

und

$$E_x \sim \frac{\partial H_z^0(x,0)}{\partial y} = -Dk_y \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y \cdot 0) = 0$$
$$= -Dk_y \cos(k_x x) \cdot 0 = 0$$
$$E_x \sim \frac{\partial H_z^0(x,2a)}{\partial y} = -Dk_y \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y \cdot 2a) = 0$$
$$\Rightarrow \sin(k_y \cdot 2a) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{2a} \qquad \text{für}\, n = 0, 1, 2, ...$$

Hinweis: m und n können nicht beide Null sein.

c) TM-Welle:

$$E_z = A\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y)\, e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Somit ergibt sich durch Einsetzen in die Wellengleichung $\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t^2} = 0$:

$$A\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y)\, e^{j(\omega t - k_z z)} \cdot \left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2\right) = 0$$

Damit erhält man für die Berechnung von ω den folgenden Zusammenhang:

$$\omega^2\mu\varepsilon = k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2$$
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}\left(k_z^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{4a^2}\right)}$$
$$= \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{a^2\pi^2 k_z^2 + m^2 + \frac{1}{4}n^2}$$

d) Der Zusammenhang zwischen k_x, k_y und k_z ist gegeben durch

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\varepsilon\mu$$

Da $\omega^2\varepsilon\mu$ konstant ist, wird k_z bei möglichst kleinen Werten für k_x und k_y maximal.

Folgende Moden sind möglich, um eine möglichst große Wellenzahl k_z zu erreichen:

Für die TE-Welle gilt: $m = 1$ und $n = 0$ oder $m = 0$ und $n = 1$. Die Konstanten m und n dürfen nicht beide gleichzeitig Null sein, da sonst kein $\vec{E}$-Feld existiert und die Divergenz des $\vec{H}$-Felde ungleich Null ist (div $\left(\vec{H}\right) \neq 0$).

Für die TM-Welle gilt: $m = 1$ und $n = 1$.

Aufgabe 5 (16 Punkte)

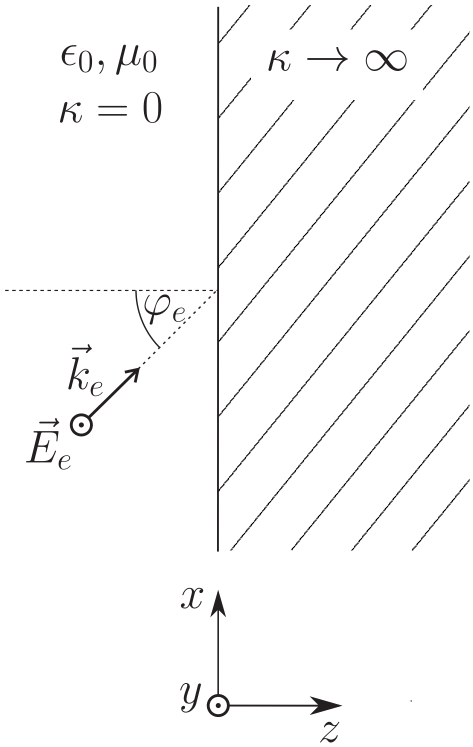


Abbildung 10: Skizze der Aufgabenstellung

Eine homogene, transversale ebene elektromagnetische Welle mit der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}_e = E_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e \vec{r}\right)} \vec{e}_y \qquad \text{mit} \qquad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{1}$$

kommt aus dem Vakuum und trifft bei $z = 0$ unter dem Einfallswinkel φ_e auf einen idealen Leiter, der den Halbraum $z > 0$ ausfüllt (siehe Abbildung 10).

a) Geben Sie zunächst für die einfallende Welle die Komponenten des Wellenzahlvektors $\vec{k}_e$ an. Berechnen Sie zudem die magnetische Feldstärke $\vec{H}_e$ in Abhängigkeit von E_e unter Verwendung der allgemein gültigen Maxwellgleichungen.

   Zeichnen Sie das $\vec{H}_e$-Feld der einfallenden Welle in die Skizze der Aufgabenstellung ein.

b) Geben Sie für die reflektierte Welle die Felder $\vec{E}_r$ und $\vec{H}_r$ an. Bestimmen Sie alle Größen in Abhängigkeit der Parameter der einfallenden Welle.

   Hinweis: Verwenden Sie für das elektrische Feld der reflektierten Welle den Ansatz:

$$\vec{E}_r = E_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_y \tag{2}$$

c) Berechnen Sie im Halbraum $z \leq 0$ unter Einbeziehung der reflektierten Welle die resultierenden Felder $\vec{E}\,(x, z, t)$ und $\vec{H}\,(x, z, t)$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

   Hinweis: $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$
   $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

d) An welchen Stellen auf der z-Achse könnten ideal leitende Platten (parallel zur $xy-$Ebene) eingebracht werden, ohne die Wellenausbreitung vor der Platte zu verändern?

Lösung 5 (16 Punkte)

a) Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle lautet:

$$\vec{k}_e = k_0 \sin(\varphi_e)\,\vec{e}_x + k_0 \cos(\varphi_e)\,\vec{e}_z \qquad \text{mit} \qquad k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}. \tag{1}$$

Für die magnetische Feldstärke gilt:

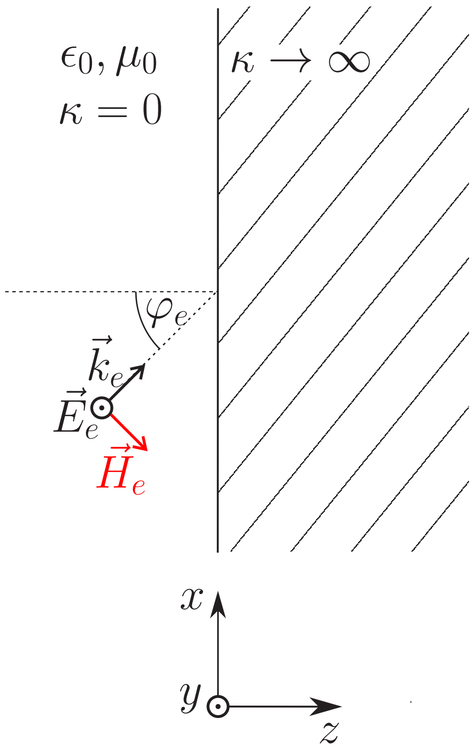
$$\vec{H}_e = \frac{j}{\omega\mu_0}\mathrm{rot}\vec{E}_e \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{E}_e &= -\frac{\partial E_{e,y}}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial E_{e,y}}{\partial x}\vec{e}_z \\ &= jk_0\cos(\varphi_e)\,E_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\vec{e}_x - jk_0\sin(\varphi_e)\,E_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\vec{e}_z \\ &= jk_0 E_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\left(\cos(\varphi_e)\,\vec{e}_x - \sin(\varphi_e)\,\vec{e}_z\right)\end{aligned} \tag{3}$$

ergibt sich

$$\vec{H}_e = E_e\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\left(\sin(\varphi_e)\,\vec{e}_z - \cos(\varphi_e)\,\vec{e}_x\right) \tag{4}$$



Die rot markierten Elemente müssen hinzugefügt werden.

b) Der Wellenzahlvektor der reflektierten Welle lautet:

$$\vec{k}_r = k_0 \sin(\varphi_r)\,\vec{e}_x - k_0 \cos(\varphi_r)\,\vec{e}_z \tag{5}$$

Der Ansatz für die reflektierte Welle:

$$\vec{E}_r = E_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_y \tag{6}$$

Mit der Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponenten gilt:

$$\begin{aligned}\vec{E}_e\left(z=0, t=0\right) + \vec{E}_r\left(z=0, t=0\right) &= 0\\ E_e e^{-j\sin(\varphi_e)x} + E_r e^{-j\sin(\varphi_r)x} &= 0\end{aligned} \tag{7}$$

Damit muss gelten $\varphi_e = \varphi_r$ und $E_r = -E_e$. Somit ist

$$\vec{E}_r = -E_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_y \tag{8}$$

Für die magnetische Feldstärke gilt:

$$\vec{H}_r = -E_e \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \left(\cos\left(\varphi_e\right) \vec{e}_x + \sin\left(\varphi_e\right) \vec{e}_z\right) \tag{9}$$

c) Die resultierende magnetische Feldstärke ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}_e + \vec{H}_r\\
&= E_e \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e \vec{r}\right)} \left(\sin\left(\varphi_e\right) \vec{e}_z - \cos\left(\varphi_e\right) \vec{e}_x\right) - e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \left(\cos\left(\varphi_e\right) \vec{e}_x + \sin\left(\varphi_e\right) \vec{e}_z\right)\right]\\
&= E_e \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[-e^{j(\omega t - k_0 \sin(\varphi_e) x)} \cos\left(\varphi_e\right) \underbrace{\left(e^{-jk_0\cos(\varphi_e)z} + e^{jk_0\cos(\varphi_e)z}\right)}_{2\cos(jk_0\cos(\varphi_e)z)} \vec{e}_x + \right.\\
&\qquad \left. e^{j(\omega t - k_0 \sin(\varphi_e) x)} \sin\left(\varphi_e\right) \underbrace{\left(e^{-jk_0\cos(\varphi_e)z} - e^{jk_0\cos(\varphi_e)z}\right)}_{-2j\sin(k_0\cos(\varphi_e)z)} \vec{e}_z\right]\\
&= -2E_e \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{j(\omega t - k_0 \sin(\varphi_e) x)} \left[\cos\left(\varphi_e\right) \cos\left(jk_0 \cos\left(\varphi_e\right) z\right) \vec{e}_x + \right.\\
&\qquad \left. j \sin\left(\varphi_e\right) \sin\left(k_0 \cos\left(\varphi_e\right) z\right) \vec{e}_z\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Das resultierende elektrische Feld der Überlagerung beider Wellen ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_e + \vec{E}_r\\
&= E_e \left(e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e \vec{r}\right)} - e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)}\right) \vec{e}_y\\
&= E_e \left(e^{j(\omega t - k_0 \sin(\varphi_e) x - k_0 \cos(\varphi_e) z)} - e^{j(\omega t - k_0 \sin(\varphi_e) x + k_0 \cos(\varphi_e) z)}\right) \vec{e}_y\\
&= E_e e^{j(\omega t - k_0 \sin(\varphi_e) x)} \underbrace{\left(e^{-jk_0\cos(\varphi_e)z} - e^{jk_0\cos(\varphi_e)z}\right)}_{-2j\sin(k_0\cos(\varphi_e)z)} \vec{e}_y\\
&= -2jE_e e^{j(\omega t - k_0 \sin(\varphi_e) x)} \sin\left(k_0 \cos\left(\varphi_e\right) z\right) \vec{e}_y\end{aligned} \tag{11}$$

d) Auch an der Stelle, an der die leitende Platte eingebracht wird müssen die Randbedingungen erfüllt sein.

$$\vec{E}_{tangential} = 0 \quad \rightarrow \quad E_y = 0 \tag{12}$$

Daraus ergibt sich:

$$E_y = 0 \quad = -2jE_e e^{j(\omega t - k_0 \sin(\varphi_e) x)} \underbrace{\sin\left(k_0 \cos\left(\varphi_e\right) z\right)}_{=0} \tag{13}$$

Es ergeben sich für die Stellen :

$$\begin{aligned} \sin\left(k_0 \cos\left(\varphi_e\right) z\right) &= 0 \\ k_0 \cos\left(\varphi_e\right) z &= n\pi \\ z &= \frac{n\pi}{k_0 \cos\left(\varphi_e\right)} \quad \text{mit} \quad n = -1, -2, -3, ... \end{aligned} \tag{14}$$