

## Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben ist folgende im Koordinatenursprung zentrierte, kugelsymmetrische Anordnung. Dabei ist die positive Ladung  $Q_1$  im Mittelpunkt bzw. Ursprung und die ebenfalls positive Ladung  $Q_2$  auf der Kugelschale ( $R_b \leq r \leq R_c$ ) aufgetragen.

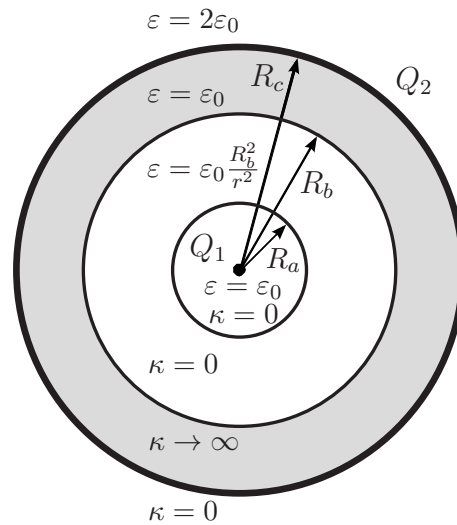


Abbildung 1: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile (a) bis (c)

Ferner weisen die einzelnen Kugelschalen folgende Charakteristika auf:

$$\begin{aligned}
 0 \leq r < R_a &: \quad \kappa = 0 & \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \\
 R_a \leq r < R_b &: \quad \kappa = 0 & \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \frac{R_b^2}{r^2} \\
 R_b \leq r \leq R_c &: \quad \kappa \rightarrow \infty & \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \\
 r > R_c &: \quad \kappa = 0 & \quad \varepsilon = 2\varepsilon_0
 \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie nun das elektrische Feld  $\vec{E}(r, \varphi, \vartheta)$  im gesamten Raum.
- Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte  $\sigma$  für die Radien  $R_a$ ,  $R_b$  und  $R_c$ .
- Berechnen Sie nun das Potential  $\Phi(r, \varphi, \vartheta)$  im gesamten Raum.  
Hierbei gilt  $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ .

Die folgenden Aufgabenteile lassen sich auch unabhängig der vorigen Teile lösen.

Gegeben sei nun eine Kugel ( $\kappa \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ) mit einer nicht zentrierten, kugelförmigen Aushöhlung ( $\kappa = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ). Dabei ist die Ladung weiterhin konzentrisch bezüglich der Aushöhlung. Die Charakteristika der jeweiligen Bereiche lassen sich aus der Abbildung 2 entnehmen.

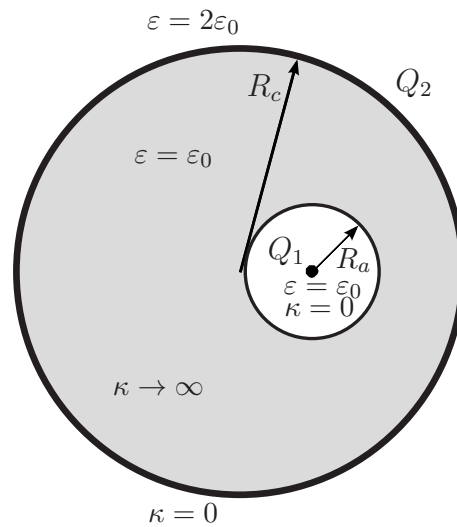


Abbildung 2: Versuchsanordnung für Aufgabenteil (d)

- d) Skizzieren Sie das elektrische Feld im gesamten Raum. Bestimmen Sie weiterhin das elektrische Feld  $\vec{E}(r, \varphi, \vartheta)$  außerhalb der Kugel.

Die Anordnung aus Aufgabenteil (d) wird beibehalten. Jedoch ist die Ladung  $Q_1$  nach rechts verschoben, also nicht konzentrisch bezüglich der Aushöhlung, positioniert.

- e) Wie sieht das Feld außerhalb der Kugel ( $r \geq R_c$ ) im Vergleich zu Aufgabenteil (d) aus? Begründen Sie!

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Aufgrund der Symmetrie hat das elektrische Feld nur eine radiale Komponente.

$$\vec{E}(r, \varphi, \vartheta) = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & 0 \leq r \leq R_a \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_b^2} \vec{e}_r & R_a < r \leq R_b \\ 0 \vec{e}_r & R_b < r \leq R_c \\ \frac{Q_1 + Q_2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & r > R_c \end{cases}$$

b) Flächenladungsdichten:

$$\sigma_{R_a} = 0$$

$$\sigma_{R_b} = -\frac{Q_1}{4\pi R_b^2}$$

$$\sigma_{R_c} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi R_c^2}$$

c)  $r > R_c$  :

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, \vartheta) - 0 &= - \int_{\infty}^r E_r dr' \\ &= - \int_{\infty}^r \frac{Q_1 + Q_2}{8\pi\epsilon_0 r'^2} dr' \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{8\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

$R_b \leq r \leq R_c$  :

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, \vartheta) - \Phi(R_c) &= - \int_{R_c}^r 0 dr' \\ \Rightarrow \Phi(r, \varphi, \vartheta) &= \frac{Q_1 + Q_2}{8\pi\epsilon_0 R_c} \end{aligned}$$

$R_a \leq r < R_b$  :

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, \vartheta) - \Phi(R_b) &= - \int_{R_b}^r \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_b^2} dr' \\ \Rightarrow \Phi(r, \varphi, \vartheta) &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_b^2} (R_b - r) + \frac{Q_1 + Q_2}{8\pi\epsilon_0 R_c} \end{aligned}$$

$0 \leq r < R_a$  :

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, \vartheta) - \Phi(R_a) &= - \int_{R_a}^r \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' \\ \Rightarrow \Phi(r, \varphi, \vartheta) &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_a} \right) + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_b^2} (R_b - R_a) + \frac{Q_1 + Q_2}{8\pi\epsilon_0 R_c} \end{aligned}$$

d) Die elektrische Feld sieht wie folgt aus:

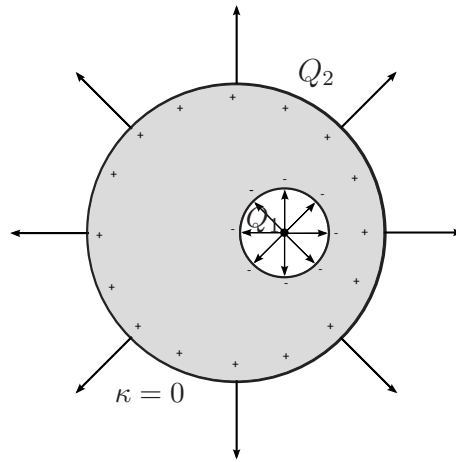


Abbildung 3: Versuchsanordnung für Aufgabenteil (d)

$$\vec{E}(r, \varphi, \vartheta) = \frac{Q_1 + Q_2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

e) Aufgrund der elektrostatischen Abschirmung ändert sich im Vergleich zu Aufgabenteil (d) das elektrische Feld außerhalb der Kugel nicht. Am Rand der inneren Aushöhlung wird weiterhin betragsmäßig die gleiche Ladung wie  $Q_1$  induziert. Jedoch ändert sich die dortige Flächenladungsdichte, sodass im ideal leitenden Teil der Kugel  $\vec{E} = \vec{0}$  vorherrscht. Am Rand bleibt die Flächenladungsdichte der rotationssymmetrischen Kugel gleichverteilt. Als Folge ist die Wirkung auf Ladungen außerhalb der Kugel äquivalent zu einer Überlagerung von Ladung  $Q_1$  und  $Q_2$ .

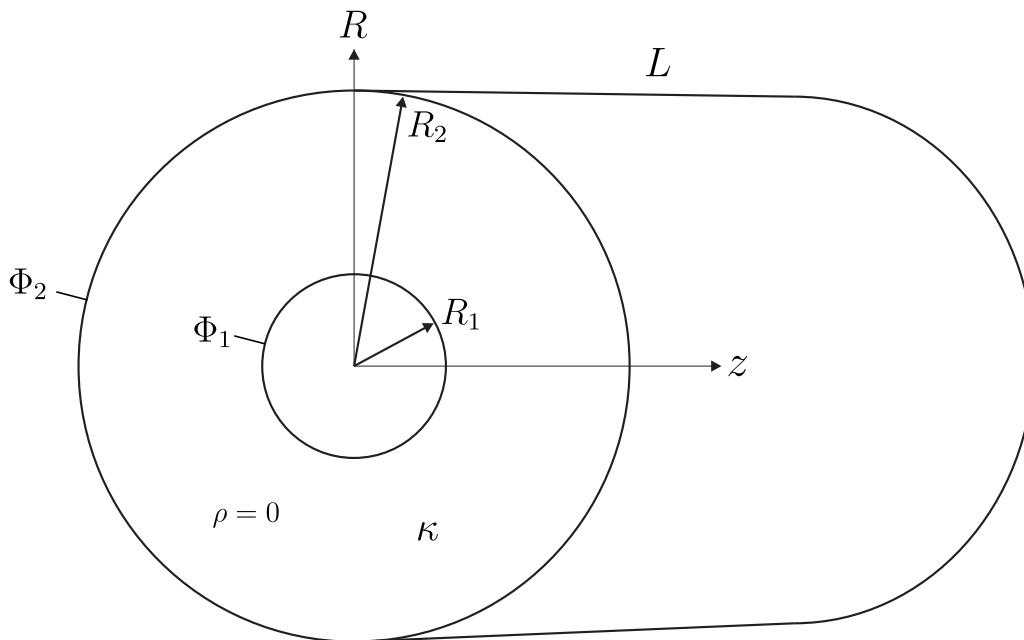
Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben ist ein Koaxialleiter der Länge  $L$ .

Das Potential des Innenleiters ist  $\Phi_1$ , das des Außenleiters  $\Phi_2$ . Für die Leiter kann eine unendlich hohe Leitfähigkeit angenommen werden. Zwischen den Leitern befindet sich ein Dielektrikum mit  $\epsilon_r = 1$  und der Leitfähigkeit  $\kappa = \kappa_0 \cdot e^{-\frac{z}{L}}$ .

Randeffekte seien vernachlässigbar.

Hinweis: Die Potentiale  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  können als konstant angenommen werden.



- Berechnen Sie mittels der Laplacegleichung das elektrische Potential  $\Phi$  für  $R \in [R_1, R_2]$  und bestimmen Sie dabei alle freien Parameter anhand der gegebenen Randbedingungen. Stellen Sie das Endergebnis möglichst kompakt dar.
- Berechnen Sie das elektrische Feld  $\vec{E}$  zwischen den Leitern als Funktion der Potentiale  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ .
- Bestimmen Sie die Stromdichte  $\vec{J}$  sowie den Strom  $I$ , der durch das leitfähige Dielektrikum fließt.
- Berechnen Sie die Kapazität  $C$  des Koaxialleiters.

Lösung 2 (16 Punkte)

- a) Aufgrund der Symmetrie der Anordnung und unter Vernachlässigung von Randeffekten gilt  $\Phi = \Phi(R)$  und  $\vec{E} = E(R)\vec{e}_R$ .

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) &= 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial R} &= \frac{C_1}{R} \\ \Phi(R) &= C_1 \ln(R) + C_2\end{aligned}$$

Die gegebenen Randbedingungen  $\Phi(R_1) = \Phi_1$  und  $\Phi(R_2) = \Phi_2$  ergeben das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= C_1 \ln(R_1) + C_2 \\ \Phi_2 &= C_1 \ln(R_2) + C_2\end{aligned}$$

und durch Subtrahieren erhält man

$$\Phi_2 - \Phi_1 = C_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

und somit

$$C_1 = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R_1) + C_2 \\ C_2 &= \Phi_1 - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R_1).\end{aligned}$$

Das elektrische Potential ist somit

$$\begin{aligned}\Phi(R) &= \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R) + \Phi_1 - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R_1) \\ \Phi(R) &= \Phi_1 + \frac{(\Phi_2 - \Phi_1) \ln\left(\frac{R}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.\end{aligned}$$

Ebenfalls korrekt:

$$\Phi(R) = \Phi_2 + \frac{(\Phi_2 - \Phi_1) \ln\left(\frac{R}{R_2}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \Phi \\ &= -\frac{\partial}{\partial R} \left( \Phi_1 + \frac{(\Phi_2 - \Phi_1) \ln\left(\frac{R}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \frac{1}{R} \vec{e}_R \\ &= \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \frac{1}{R} \vec{e}_R \end{aligned}$$

c) Die Stromdichte ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \kappa \vec{E} \\ &= \kappa_0 \cdot e^{-\frac{z}{L}} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \frac{1}{R} \vec{e}_R. \end{aligned}$$

Der Strom  $I$  kann durch Integration der Stromdichte berechnet werden:

$$\begin{aligned} I &= \iiint \vec{J} d\vec{f} \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} J(R) R d\varphi dz \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \kappa_0 \cdot e^{-\frac{z}{L}} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} d\varphi dz \\ &= \int_0^L 2\pi \kappa_0 \cdot e^{-\frac{z}{L}} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} dz \\ &= 2\pi \kappa_0 \cdot (-Le^{-1} + L) \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \\ &= 2\pi \kappa_0 L (1 - e^{-1}) \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \end{aligned}$$

d) Zur Berechnung der Kapazität muss zuerst die Ladung auf dem Leiter berechnet werden. Für die Grenzfläche bei  $R_1$  ergibt sich für die Flächenladungsdichte

$$\begin{aligned}\sigma &= D_{n2} - D_{n1} \\ &= \varepsilon_0 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \frac{1}{R_1} \vec{e}_R - 0.\end{aligned}$$

Mittels Integration kann die Ladung  $Q$  berechnet werden:

$$\begin{aligned}Q &= \iiint \vec{D} d\vec{f} \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} d\varphi dz \\ &= 2\pi L \varepsilon_0 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.\end{aligned}$$

Die Kapazität ist somit

$$\begin{aligned}C &= \frac{Q}{U} \\ &= \frac{2\pi L \varepsilon_0 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}{\Phi_1 - \Phi_2} \\ &= \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\end{aligned}$$





Lösung 3 (16 Punkte)

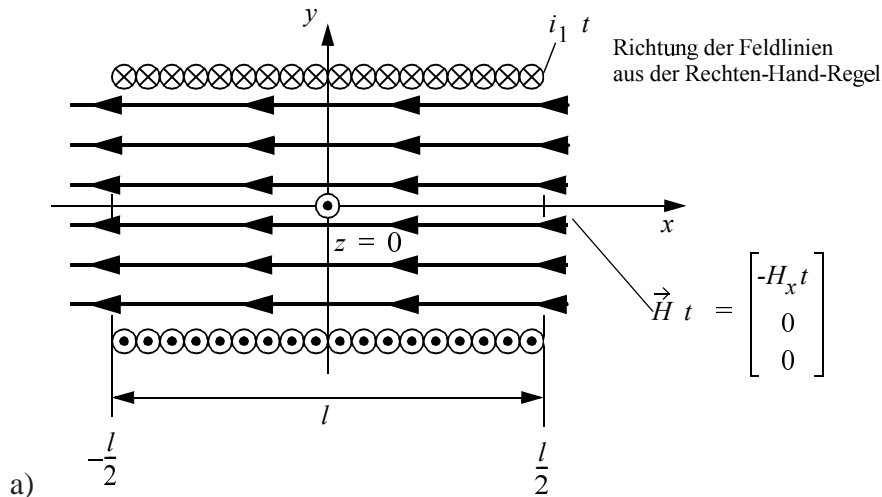


Abbildung 5: Feldverteilung in der Ebene  $z = 0$  im Inneren der Spule.

Der Radius der Spule soll deutlich kleiner sein als die Länge. Daher ergibt sich im Inneren der Spule ein nahezu homogener  $H$ -Feldverlauf der nur eine Komponente  $H_x(t)$  entgegen der  $x$ -Achse aufweist  $H_y = H_z = 0$ .

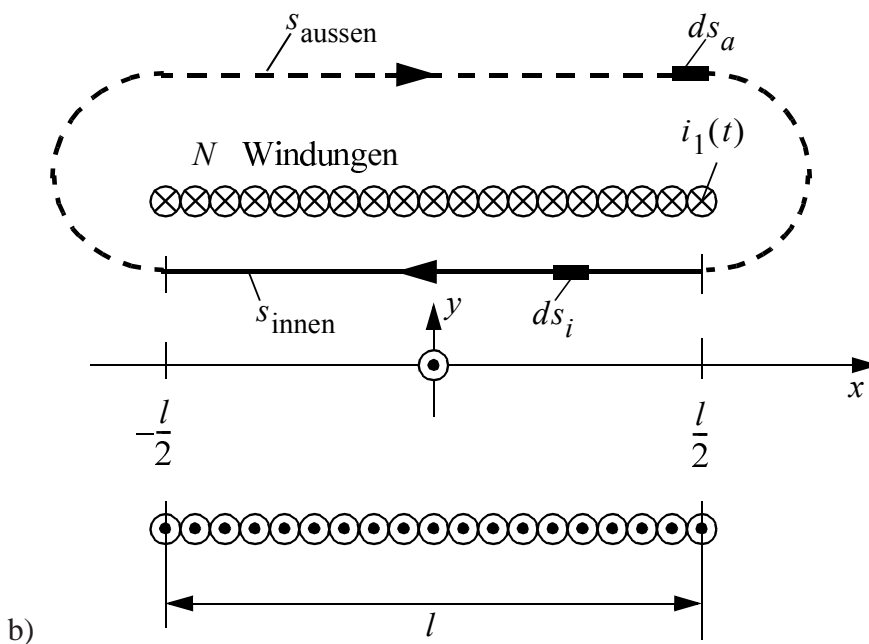


Abbildung 6: Umlaufweg für Durchflutungsgesetz.

Die Berechnung des  $\vec{H}$ -Feldes im Inneren der Spule erfolgt über das Durchflutungsgesetz:

$$\oint_s \vec{H}(t) \cdot d\vec{s} = \sum i$$

Der geschlossene Integrationsweg  $s$  umschließt alle  $N$  Windungen, die den Strom  $i_1(t)$  führen.

$$\Rightarrow \sum i = -N \cdot i_1(t)$$

Der Integrationsweg  $s$  lässt sich in einen Weg im Innern der Spule und einen Weg außerhalb der Spule aufteilen:  $s = s_{\text{innen}} + s_{\text{außen}}$ , mit den jeweiligen differentiellen Wegelementen  $ds_i$  und  $ds_a$ . Das Durchflutungsgesetz liefert damit:

$$\int_{s_{\text{außen}}} \vec{H}(t) \cdot d\vec{s}_a + \int_{s_{\text{innen}}} \vec{H}(t) \cdot d\vec{s}_i = -N \cdot i_1(t)$$

Durch die enge Wicklung der Spule und die Vorgabe  $l \gg R_1$  konzentriert sich ein homogenes  $H$ -Feld im Inneren der Spule. Der deutlich kleinere Beitrag außerhalb der Spule kann daher vernachlässigt werden:

$$\Rightarrow \int_{s_{\text{außen}}} \vec{H}(t) \cdot d\vec{s}_a \approx 0$$

Der Integrationsweg  $s_{\text{innen}}$  verläuft parallel zur  $x$ -Achse von  $-l/2$  bis  $+l/2$ :

$$\Rightarrow d\vec{s}_i = dx \cdot \vec{e}_x$$

$$-N \cdot i_1(t) = \int_{s_{\text{innen}}} \vec{H}(t) \cdot d\vec{s}_i = \int_{-l/2}^{+l/2} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{-l/2}^{+l/2} H_x dx = H_x \cdot [x]_{-l/2}^{+l/2}$$

Lösung:

$$\vec{H}(t) = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad H_x = \frac{-N \cdot i_1(t)}{l}, \quad H_y = H_z = 0$$

- c) Aus Formelsammlung: Allgemein gilt für die Berechnung des magnetischen Fluß  $\Phi(t)$  durch die Fläche  $F_{DS}$  der Drahtschleife:

$$\Phi(t) = \iint_{F_{DS}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{f} = \iint_{F_{DS}} |\vec{B}(t)| \cdot |d\vec{f}| \cdot \cos(\vec{B}(t), d\vec{f})$$

mit

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \cdot \vec{H}(t) = \underbrace{\mu_0 \cdot \frac{-N \cdot i_1(t)}{l}}_{|\vec{B}(t)|} \cdot \vec{e}_x \quad \text{und} \quad |d\vec{f}| = df$$

erhält man:

$$\Phi(t) = \iint_{F_{DS}} \mu_0 \cdot \frac{-N \cdot i_1(t)}{l} \cdot df \cdot \cos(\vec{e}_x, d\vec{f}) = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i_1(t)}{l} \underbrace{\iint_{F_{DS}} df \cdot \cos(\vec{e}_x, d\vec{f})}_{\text{projizierte Fläche } F_{DS}(t)}$$

projizierte Fläche  $F_{DS}(t)$  der Drahtschleife, die senkrecht von  $\vec{B}$  durchsetzt wird.

Die Gesamtfläche der rechteckigen Drahtschleife beträgt:  $F_{DS} = a \cdot b$

Die projizierte Fläche in Abhängigkeit von  $\varphi(t)$  ergibt sich zu:

$$F_{DS}(t) = a \cdot b \cdot \sin(\varphi(t))$$

da gelten muss  $F_{DS}(0) = 0$  und  $F_{DS}(\varphi(t) = 90^\circ) = a \cdot b$

Einsetzen der drei gegebenen Zeitpunkte liefert die Lösung.

Lösung:

$$\Phi_1 = \mu_0 \cdot \frac{-N \cdot i_1(t_1)}{l} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\varphi(t_1)) = 0$$

$$\Phi_2 = \mu_0 \cdot \frac{-N \cdot i_1(t_2)}{l} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\varphi(t_2)) = \mu_0 \cdot \frac{-N \cdot i_1(t_2)}{l} \cdot a \cdot b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Phi_3 = \mu_0 \cdot \frac{-N \cdot i_1(t_3)}{l} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\varphi(t_3)) = \mu_0 \cdot \frac{-N \cdot i_1(t_3)}{l} \cdot a \cdot b$$

d) Magnetische Feldenergiedichte:

$$w_m = \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2$$

Magnetische Feldenergie im Inneren der Spule:

$$W_m = \int w_m dv = \frac{1}{2} \mu \int \int \int \vec{H}(t)^2 R' dR' d\phi dz$$

Lösung:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \mu \cdot \frac{1}{2} r_1^2 \cdot 2\pi \cdot l \cdot \left( \frac{-N \cdot i_1(t)}{l} \right)^2 \\ &= \frac{\mu \pi r_1^2}{2l} \cdot N^2 \cdot i_1^2(t). \end{aligned}$$

e) Für den magnetischen Fluss ergibt sich:

$$\Phi(t) = \mu_0 \cdot \frac{-N \cdot i_1(t)}{l} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega t)$$

Aus dem Induktionsgesetz folgt die Spannung  $U_R$ , die über dem Widerstand  $R$  abfällt:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = U_{ind} = U_R$$

und somit gilt für  $U_R(t)$  :

$$U_R(t) = -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i_1(t) \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega t)}{l} \right)$$

und  $i_2(t)$ :

$$i_2(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

Um  $i_1(t)$  berechnen zu können, muss also die folgende Gleichung gelöst werden:

$$i_2(t) \cdot R = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Integration beider Seiten ergibt:

$$\int i_2(t) = \int R \cdot \hat{I}_2 \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{R \cdot \hat{I}_2}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\int -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i_1(t) \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega t)}{l}$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$\frac{R \cdot \hat{I}_2}{\omega} \cdot \sin(\omega t) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i_1(t) \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega t)}{l}$$

$$i_1(t) = \frac{l \cdot \hat{I}_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)}{\mu_0 \cdot N \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega t)}$$

$$i_1(t) = i_1 = \frac{l \cdot \hat{I}_2}{\mu_0 \cdot N \cdot a \cdot b \cdot \omega}$$

Lösung:

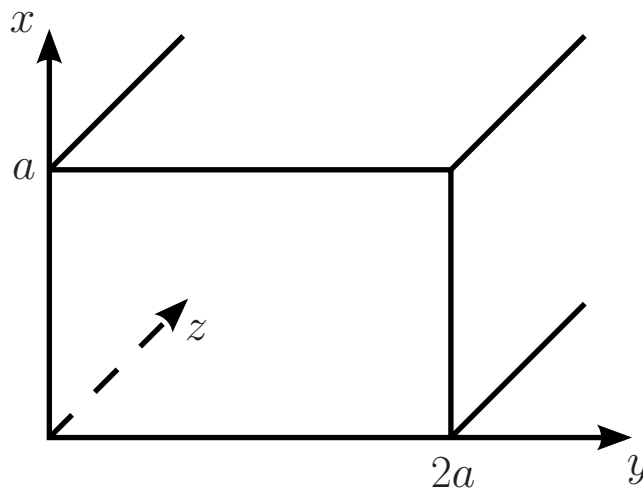
$$i_1(t) = i_1 = \frac{l \cdot \hat{I}_2 \cdot R}{\mu_0 \cdot N \cdot a \cdot b \omega}$$

- f) Befindet sich die Schleife in der Mitte der Spule wird kein Strom induziert, da der Magnetische Fluss konstant bleibt bzw. weil sich der Leiter parallel zum Magnetfeld bewegt.

Beim Austreten aus der Schleife wird ein Strom induziert, da sich das Magnetfeld abschwächt und sich dadurch der magnetische Fluss verändert.

## Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt aus unendlich gut leitendem Material. Die Kantenlängen des Querschnitts seien  $a$  und  $2a$ . Im Innern des Hohlleiters befinde sich eine  $TM_{mn}$ -Welle mit den Wellenzahlen  $k_x (m)$  und  $k_y (n)$ .



Hinweis:

$$E_x = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left( j k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left( j k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_x = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left( j k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - j \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$H_y = -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left( j k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} + j \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

- a) Welche Randbedingungen müssen für  $E_x$ ,  $E_y$  und  $E_z$  an den Hohlleiterwänden gelten?  
 b) Welche der beiden angegebenen Funktionen für  $E_z(x, y, z, t)$  entspricht den Randbedingungen? Begründen Sie durch Rechnung!

$$(1) \quad E_z(x, y, z, t) = E_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$(2) \quad E_z(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Bestimmen Sie die Wellenzahlen  $k_x$  und  $k_y$  in Abhängigkeit von  $m$  und  $n$ .

- c) Berechnen Sie die Feldkomponenten  $E_x(x, y, z, t)$ ,  $E_y(x, y, z, t)$ ,  $H_x(x, y, z, t)$  und  $H_y(x, y, z, t)$  der  $TM_{11}$ -Welle.

d) Um welche Wellentypen  $TM_{mn}$  oder  $TE_{mn}$  handelt es sich bei den Abbildungen 7 und 8 jeweils? Geben Sie die Modenzahlen  $m$  bezüglich  $x$ -Richtung und  $n$  bezüglich  $y$ -Richtung der jeweiligen Abbildung an. Begründen Sie.

Hinweis: Die durchgezogenen Linien zeigen das elektrische Feld, die gestrichelten das magnetische Feld.

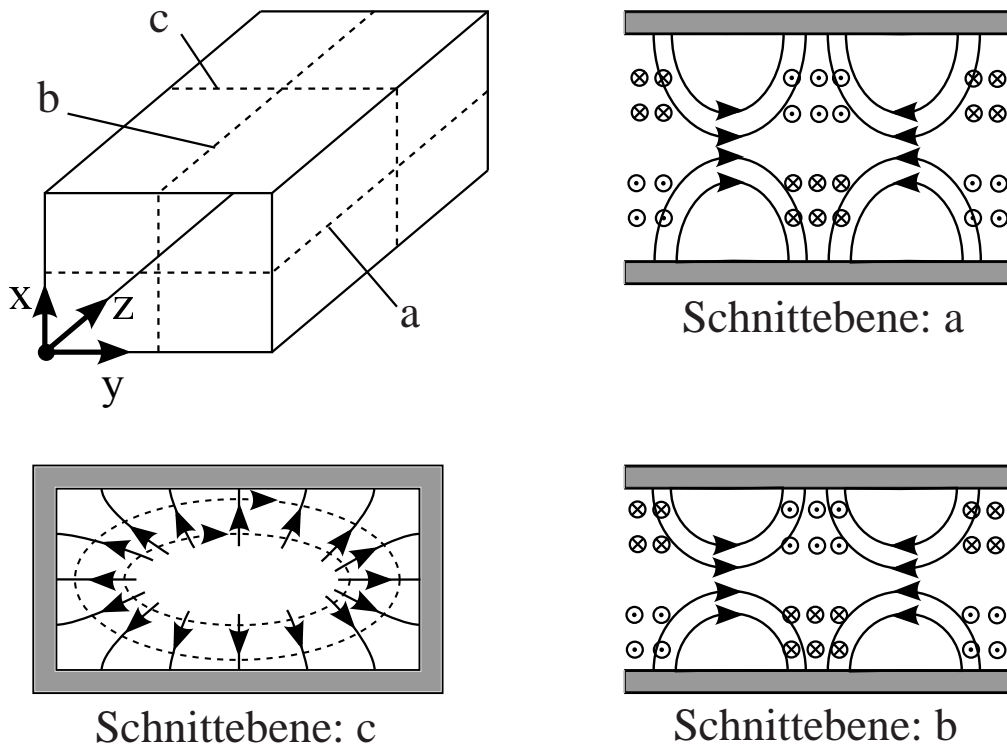


Abbildung 7

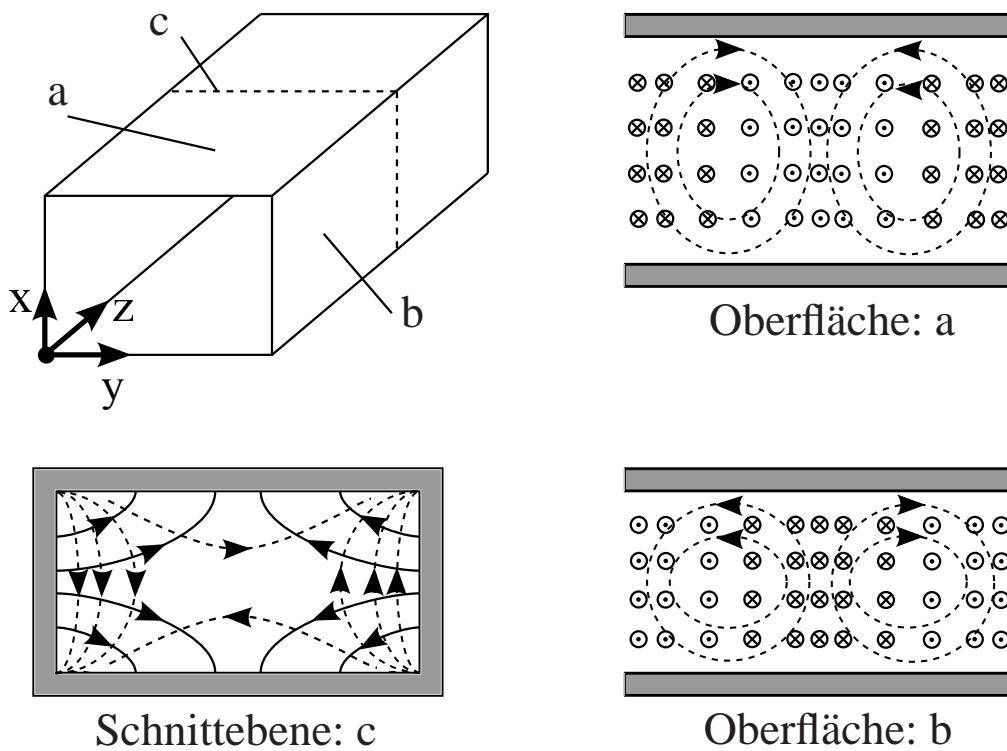


Abbildung 8

Lösung 4 (16 Punkte)

a) An den Hohlleiterwänden kann kein tangenciales E-Feld existieren.

$$E_x(x, 0, z, t) = 0, \quad E_y(0, y, z, t) = 0$$

$$E_x(x, 2a, z, t) = 0, \quad E_y(a, y, z, t) = 0$$

$$E_z(x, 0, z, t) = 0, \quad E_z(0, y, z, t) = 0$$

$$E_z(x, 2a, z, t) = 0, \quad E_z(a, y, z, t) = 0$$

b) Es kann gezeigt werden, dass  $E_z(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$  die Randbedingungen erfüllt:

$$E_z|_{x=0} = E_0 \underbrace{\sin(k_x \cdot 0)}_{=0} \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

Die Randbedingung

$$E_z|_{x=a} = E_0 \underbrace{\sin(k_x \cdot a)}_{=0} \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

wird erfüllt falls gilt:

$$k_x \cdot a = m \cdot \pi \quad \rightarrow \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{mit} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Die restlichen Randbedingungen können auf die gleiche Weise überprüft werden:

$$E_z|_{y=0} = E_0 \sin(k_x x) \underbrace{\sin(k_y \cdot 0)}_{=0} e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

$$E_z|_{y=2a} = E_0 \sin(k_x x) k_y \underbrace{\sin(k_y \cdot 2a)}_{=0} e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

wenn:

$$k_y \cdot 2a = n \cdot \pi \quad \rightarrow \quad k_y = \frac{n\pi}{2a} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

c) Die  $E_z$ -Komponente der  $TM_{11}$ -Welle ist

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}.$$

Mit  $H_z = 0$  und den Hinweisen können die fehlenden Feldkomponenten berechnet werden.

$$E_x = -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$E_y = -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{2a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{2a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$



- d) **Abbildung 7:** In  $z$ -Richtung existiert nur ein E-Feld  $\Rightarrow$  TM-Welle  
Aus c) gilt:

$$H_x = \underbrace{\frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi n}{2a}}_{\hat{H}_x} \sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_y = -\underbrace{\frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi m}{a}}_{\hat{H}_y} \cos\left(\frac{\pi m}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Für Schnittebene a ist  $x = \frac{a}{2}$ :

$$H_y = -\hat{H}_y \underbrace{\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)}_{=0} \sin\left(\frac{\pi n}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

$$H_x = \hat{H}_x \underbrace{\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}_{=\pm 1} \cos\left(\frac{\pi n}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$= \pm \hat{H}_x \cos\left(\frac{\pi n}{2a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Da  $H_x$  in der Schnittebene a nur ein Vorzeichenwechsel hat, ist  $n = 1$ .

Für Schnittebene b ist  $y = a$ :

$$H_x = \hat{H}_x \sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{=0} e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

$$H_y = -\hat{H}_y \cos\left(\frac{\pi m}{a}x\right) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$= -\hat{H}_y \cos\left(\frac{\pi m}{a}x\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Da  $H_y$  in der Schnittebene a nur ein Vorzeichenwechsel hat, ist  $m = 1$ .

$\Rightarrow$   $TM_{11}$ -Welle

**Abbildung 8:** In  $z$ -Richtung existiert nur ein H-Feld  $\Rightarrow$  TE-Welle

$$\left. \begin{array}{l} E_x \neq 0 \\ E_y \neq 0 \\ H_x \neq 0 \\ H_y \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{k_x \neq 0}_{\Rightarrow m \neq 0} \quad \wedge \quad \underbrace{k_y \neq 0}_{\Rightarrow n \neq 0}$$

$E_x$  weist für ein festes  $z$  auf der Oberfläche a für alle  $y$  in die gleiche Richtung  $\Rightarrow m = 1$

$E_y$  weist für ein festes  $z$  auf der Oberfläche b für alle  $x$  in die gleiche Richtung  $\Rightarrow n = 1$

## Aufgabe 5 (16 Punkte)

Betrachtet werde zunächst ein Hertz'scher Dipol der Länge  $l$ , durch den der Strom  $I(t - \frac{r}{c})$  fließt. Das magnetische Vektorpotential berechnet sich zu

$$\vec{A}(r, t) = \frac{l\mu}{4\pi r} \cdot I\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{e}_z$$

- a) Berechnen Sie das elektrische Potential  $\Phi_{el}$  mit Hilfe der Lorentz-Eichung  $\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ . Nutzen Sie dazu  $\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$ . Stellen Sie dann  $\Phi_{el}$  als Funktion von  $r$  und  $\theta$  dar. Hinweis: Berücksichtigen Sie die vorliegende harmonische Zeitabhängigkeit.
- b) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential  $\vec{A}$  die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ . In welchem Abstand  $r$  zum Dipol sind die Anteile des Nah- und des Fernfeldes gleich groß?

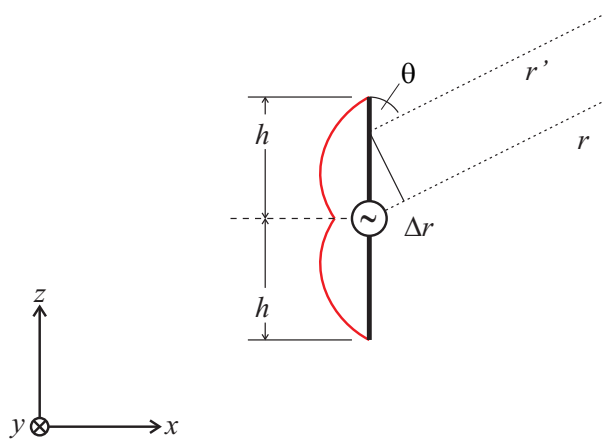


Abbildung 9: Reale Dipolantenne

Betrachtet wird nun die lineare Dipolantenne der Höhe  $2h = \frac{\lambda}{2}$  in Abbildung 9.

- c) Zur Auswahl stehen die nachfolgenden von  $z$  abhängigen Stromverteilungen:

$$I_1 = I_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \quad I_2 = I_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(h - |z|)\right)$$

Welche Stromverteilung/en ist/sind für die betrachtete Dipolantenne zulässig? Begründen Sie.

- d) Das Vektorpotential eines einzelnen infinitesimal kleinen Dipols lautet:

$$dA_z = \frac{\mu \cdot I \cdot dz}{4\pi \cdot r'} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} r'\right) \quad \text{mit} \quad I = I_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

Berechnen Sie das Vektorpotential der betrachteten Dipolantenne im Fernfeld in der Form  $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$ . Schlüsseln Sie dann auf nach  $A_z = A_0(\theta) \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}}$  und stellen Sie  $A_0(\theta)$  ohne komplexe Zahlen dar.

$$\text{Hinweis: } \int e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x) \cdot dx = \frac{e^{a \cdot x} (a \cdot \cos(b \cdot x) + b \cdot \sin(b \cdot x))}{a^2 + b^2}$$

Lösung 5 (16 Punkte)a) Elektrisches Potential

Harmonische Zeitabhängigkeit:

$$I\left(t - \frac{r}{c}\right) = \hat{I} \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \Rightarrow A_z(r, t) = \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi r} \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \quad \text{und} \quad \Phi = -\frac{j}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Damit folgt aus der Lorentz-Eichung unter Verwendung des Hinweises und  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -c^2 \left( \frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\ &= -c^2 \cdot \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi} \cdot \left[ -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \left( -j \frac{\omega}{c} \right) \right] \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \Rightarrow \Phi &= \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi} \cdot \left[ -\frac{j c^2}{\omega r^2} + \frac{c}{r} \right] \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Der geometrische Zusammenhang  $z/r = \cos \theta$  führt auf die Darstellung in Kugelkoordinaten:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi} \cdot \cos \theta \cdot \left[ -\frac{j c^2}{\omega r^2} + \frac{c}{r} \right] \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})}$$

b) Magnetisches Feld

$$\text{Rotation: } A_\varphi = 0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \text{rot } \vec{A} = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\mu r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Damit gilt  $\vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$  mit

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{1}{\mu r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{-1}{\mu r} \cdot \frac{\mu l \hat{I}}{4\pi} \left[ \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \right) + \frac{1}{r} \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \right] \\ \Rightarrow H_\varphi &= \frac{l \hat{I}}{4\pi} \sin \theta \cdot \left( \frac{j\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right) \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \end{aligned}$$

Die Anteile des Fern- und des Nahfeldes sind gleich für:

$$\omega/rc = 1/r^2 \quad \Rightarrow \quad r \stackrel{!}{=} c/\omega$$

c) Der Strom entlang der Stäbe der Antenne muss die nachfolgenden Randbedingungen erfüllen:

- max. am Ursprung:  $I(z = 0) \stackrel{!}{=} I_{max}$
- Null am Ende der Stäbe:  $I(z = h) \stackrel{!}{=} 0$

Beide Stromverteilungen erfüllen die Randbedingungen und sind zulässig.

d) Magnetisches Vektorpotential

Da der Dipol in  $z$ -Richtung zeigt, gilt folgender Ansatz:

$$A_z = \frac{\mu I_0}{4\pi} \int_{z=-h}^h \frac{1}{r'} \cdot e^{-j\frac{2\pi r'}{\lambda}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) dz$$

Für große  $r$  gilt  $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'}$ . Jedoch muss beim Phasenterm der Wegunterschied beachtet werden. Für große  $r$  sind die Strahlen  $r$  und  $r'$  parallel und es gilt  $r' = r - z \cos \theta$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu I_0}{4\pi r} \cdot e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \cdot \int_{z=-h}^h e^{j\left(\frac{2\pi \cos(\theta)}{\lambda}\right)z} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) dz \\ &= \frac{\mu I_0}{4\pi r} \cdot e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \cdot \left[ \frac{e^{j\left(\frac{2\pi \cos(\theta)}{\lambda}\right)z} \cdot \frac{j\frac{2\pi}{\lambda} \cos(\theta) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right) + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right)}{-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \cos^2(\theta) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2} \right]_{-h=-\frac{\lambda}{4}}^{h=\frac{\lambda}{4}} \\ &= \frac{\mu I_0}{4\pi r} \cdot e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \cdot \frac{\left(0 + \frac{2\pi}{\lambda}\right) e^{j\frac{\pi}{2} \cos(\theta)} - \left(0 - \frac{2\pi}{\lambda}\right) e^{-j\frac{\pi}{2} \cos(\theta)}}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \cos^2(\theta))} \\ &= \frac{\mu I_0}{4\pi} \frac{\left(e^{j\frac{\pi}{2} \cos(\theta)} + e^{-j\frac{\pi}{2} \cos(\theta)}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} (1 - \cos^2(\theta))} \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} A_0(\theta) &= \frac{\mu I_0}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\pi}{2} \cos(\theta)} + e^{-j\frac{\pi}{2} \cos(\theta)}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} (1 - \cos^2(\theta))} \\ &= \frac{\lambda \mu I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{4\pi^2 \sin^2(\theta)} \end{aligned}$$