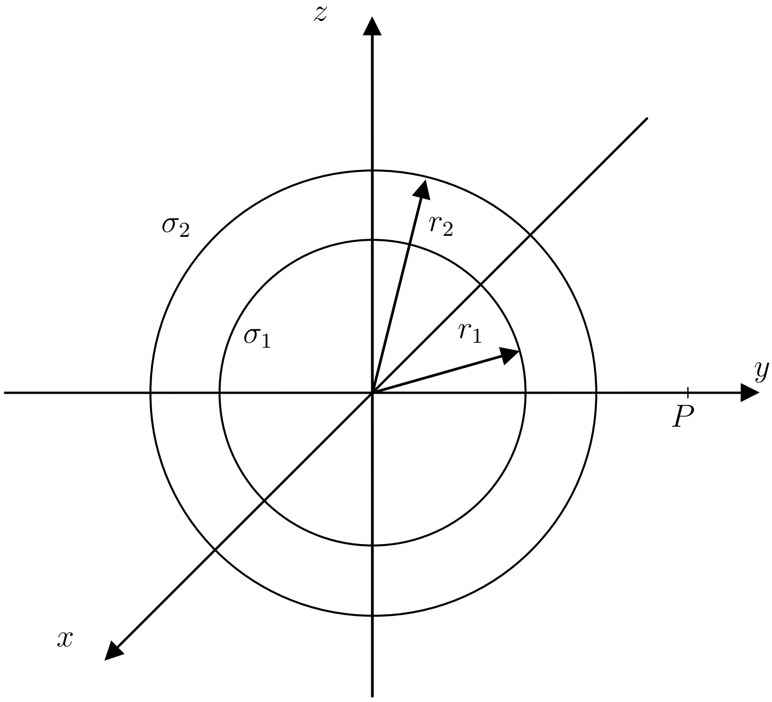
Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben seien die beiden ideal leitenden Kugelschalen mit den Radien r_1 und r_2 sowie den Oberflächenladungsdichten σ_1 und σ_2:



a) Berechnen Sie die Ladungen Q_1 und Q_2 auf den beiden Kugelschalen. 2

b) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke im gesamten Raum. 3

c) Berechnen Sie das elektrostatische Potential im gesamten Raum unter der Bedingung $\phi(r) \to 0$ für $r \to \infty$. 3

d) Skizzieren Sie den Verlauf der elektrischen Feldstärke und den Verlauf des elektrostatischen Potentials in radiale Richtung für positive Ladungen Q_1 und Q_2. 2

Nun wird eine Punktladung mit der Ladung Q_3 im Punkt $P = (0, a, 0)$ mit $a > r_2$ angebracht. Es wird angenommen, dass die Ladungen Q_1 und Q_2 weiterhin positiv sind und die Ladung Q_3 negativ ist.

e) Wie verändert sich die Ladungsverteilung der Oberflächenladungsdichten σ_1 und σ_2. Begründen Sie Ihre Antwort. 2

f) Es wird angenommen, dass im Folgenden gilt: $|Q_1 + Q_2| >> |Q_3|$
Welche vereinfachende Annahme können Sie dadurch treffen? Berechnen Sie die Kraft, welche auf die Punktladung Q_3 wirkt. Welche minimale kinetische Energie wird benötigt, um die eingebrachte Punktladung von der Anziehung von Q_1 und Q_2 zu entziehen? 4

Loesung 1 (16 Punkte)

Musterlösung der Aufgabe 1

a)

$$Q_1 = \sigma_1 4\pi r_1^2$$

$$Q_2 = \sigma_2 4\pi r_2^2$$

b) Durchflutungsgesetz: $\int \vec{D}\, d\vec{f} = \int \varrho\, dv$
(Darauf achten, dass durch $<$ und $\leq$ gesamter Raum definiert ist)
1. $r < r_1$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= 0 \\ \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

2. $r_1 \leq r < r_2$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{Q_1}{4\pi r^2}\vec{e}_r \\ \vec{E} &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r \end{aligned}$$

3. $r_2 \leq r$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi r^2}\vec{e}_r \\ \vec{E} &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \Phi(r_2) - \Phi(r_1) &= -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{s} \\ \Phi(r \to \infty) &= 0 \end{aligned}$$

3. $r_2 \leq r$

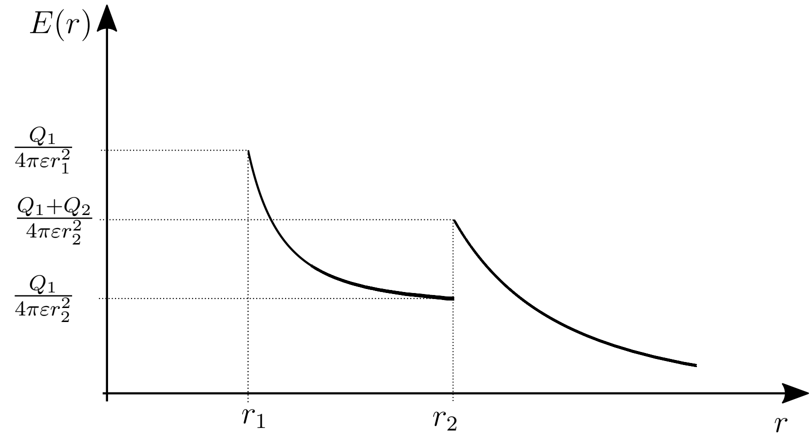
$$\begin{aligned} \Phi(r) - \Phi(\infty) &= -\int_{\infty}^{r} \vec{E} d\vec{s} \\ \Phi(r) &= -\int_{\infty}^{r} \vec{E} d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\, dr = \left[\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r} \end{aligned}$$

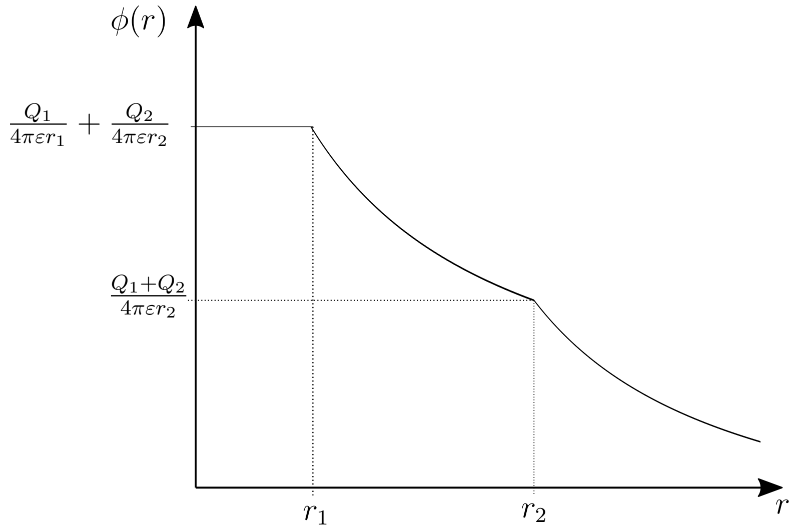
2. $r_1 \leq r < r_2$

$$\begin{aligned} \Phi(r) - \Phi(r_2) &= -\int_{r_2}^{r} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\, dr \\ \Phi(r) &= \left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r}\right]_{r_2}^{r} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon r_2} \end{aligned}$$

1. $r < r_1$

$$\Phi(r) - \Phi(r_1) = -\int_{r_1}^{r} 0 \, dr$$
$$\Phi(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon r_2}$$





d)

e) σ_1:
nicht mehr gleichmäßig verteilt, da sich äußeres Feld verändert,
Ladungen verschieben sich Richtung Punktladung

σ_2:
weiterhing gleichmäßig verteilt, da äußere Kugel Punktladung abschirmt

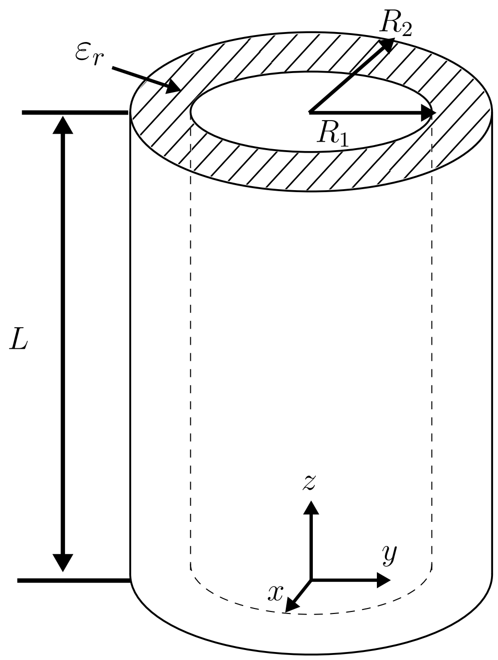
f) Annahme: $\vec{E} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$ für $r_2 \leq r$

$$\vec{F} = Q_3 \cdot \vec{E} = Q_3 \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$$

$$W = \int_a^\infty \vec{F} \, d\vec{s}$$
$$= \int_a^\infty Q_3 \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \, dr = \left[-Q_3 \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r}\right] = Q_3 \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon a}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben ist ein zylinderförmiger Kondensator mit der Länge L, dem inneren Radius R_1 und dem äußeren Radius R_2. Die Mantelflächen bestehen aus ideal leitfähigem Material. Auf dem inneren Zylindermantel befindet sich die Ladung Q und auf dem äußeren Zylindermantel befindet sich die Ladung $-Q$. Der Raum zwischen dem inneren und aüßeren Zylinder ist mit einer Flüssigkeit ($\varepsilon_r = 2$) gefüllt.



a) Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators in Abhängigkeit der Radien R_1 und R_2. 5

Die Flüssigkeit kann nun aus dem Kondensator herausfließen. Zudem kann Luft ($\varepsilon_r = 1$) nachströmen. Die Ladungen bleiben während dieses Vorgangs konstant.

b) Berechnen Sie die elektrische Kraft, die auf die Flüssigkeit wirkt, in Abhängigkeit der Füllhöhe z. Wird die Flüssigkeit durch die elektrische Kraft herausgedrückt oder hineingezogen? Begründen Sie Ihre Antwort! Hinweis: $\vec{F} = -\text{grad}\, W$ 5

c) Berechnen und skizzieren Sie die Oberflächenladungsdichte σ auf dem äußeren Zylindermantel im flüssigkeitsgefüllten Teil in Abhängigkeit der Füllhöhe z. 3

Der Zylinderkondensator sei erneut vollständing mit derselben Flüssigkeit gefüllt. Diesmal ist jedoch eine Spannungsquelle U an den Kondensator angeschlossen.

d) Berechnen und skizzieren Sie die Oberflächenladungsdichte σ auf dem äußeren Zylindermantel im flüssigkeitsgefüllten Teil in Abhängigkeit der Füllhöhe z. 3

Loesung 2 (16 Punkte)

Musterlösung der Aufgabe 3

a) Die Kapazität berechnet sich aus: $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\int \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{f}}{-\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s}}$

Zunächst muss das E-Feld innerhalb des Kondensators berechnet werden. Aufgrund der Rotationssymmetrie gilt:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= E_R \vec{e}_R \\
\int \vec{D}\vec{f} &= \int \varrho \,\mathrm{d}v \\
\int_0^L \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 \varepsilon_r E_R R \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R} \varrho \, R' \,\mathrm{d}R' \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \\
2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L R E_R &= Q \\
E_R &= \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L R}
\end{aligned}
$$

Für die Spannung zwischen dem inneren und dem äußeren Mantel gilt:

$$
\begin{aligned}
U &= -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} \\
&= -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L R'} \,\mathrm{d}R' \\
&= -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L} \left[\ln|R'|\right]_{R_2}^{R_1} \\
&= \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)
\end{aligned}
$$

Somit berechnet sich die Kapazität zu:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{Q}{U} \\
&= \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L} \ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} \\
&= \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}
\end{aligned}
$$

b) Für die Energie eines Kondensators gilt folgende Formel:

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} C U^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}
\end{aligned}
$$

Nach dem Hinweis ergibt sich die Kraft zu:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= -\operatorname{grad} W \\
&= -\operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}\right)
\end{aligned}
$$

Da die Ladung während des Vorgangs konstant bleibt, ist die Kraft nur noch eine Funktion der Kapazität. Diese Kapazität setzt sich aus zwei parallel geschalteten Kapazitäten zusammen. Ein luftgefüllter Zylinderkondensator mit der Länge $(L-z)$ und einem flüssigkeitsgefülltem Kondensator mit der Länge z. Die Gesamtkapazität ist somit:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r z}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} + \frac{2\pi\varepsilon_0(L-z)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \\ &= \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot (L+z) \end{aligned}$$

Die Gesamtkapazität ist nur von der Füllhöhe z abhängig. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{e}_z \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)}{\mathrm{d}z} \\ &= -\vec{e}_z \frac{Q^2}{2} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{C}\right)}{\mathrm{d}z} \\ &= -\vec{e}_z \frac{Q^2}{2} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\varepsilon_0(L+z)}\right)}{\mathrm{d}z} \\ &= -\vec{e}_z \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{L+z}\right)}{\mathrm{d}z} \\ &= -\vec{e}_z \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{-1}{(L+z)^2} \\ &= \vec{e}_z \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{(L+z)^2} \end{aligned}$$

Durch die entstehende Kraft wird die Flüssigkeit in den Kondensator gezogen. Dies ist daran zu erkennen, dass die Kraft $\vec{F}$ in positive z-Richtung zeigt. Alternative Begründung: Ein physikalisches System strebt immer nach einem Energetischen Minimum. Die Energie im Kondensator wird dann minimal, wenn die Kapazität am größten ist.

c) Es liegt folgendes Potential an:

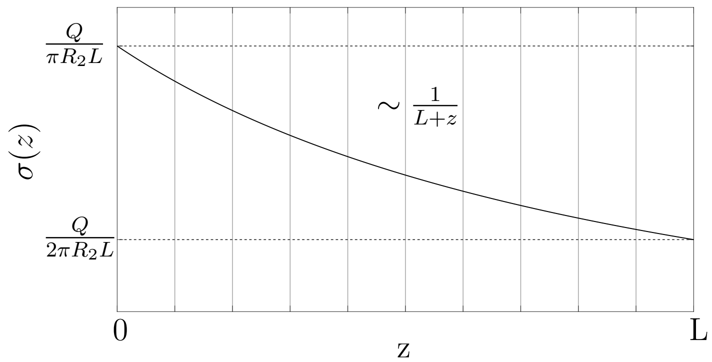
$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{C(z)} \\ &= Q\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\varepsilon_0 \cdot (L+z)} \end{aligned}$$

Damit kann man die Ladung des flüssigkeitsgefüllten Teils (Q_1) bestimmen:

$$\begin{aligned} Q_1 &= U \cdot C_1 \\ &= Q\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\varepsilon_0 \cdot (L+z)} \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, z}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \\ &= Q\frac{2z}{L+z} \end{aligned}$$

Die Flächenladungsdichte auf dem äußeren Zylindermantel ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{-Q_1}{A} \\
&= \frac{-Q\dfrac{2z}{L+z}}{2\pi R_2 z} \\
&= \frac{-Q}{\pi R_2 (L+z)}
\end{aligned}$$

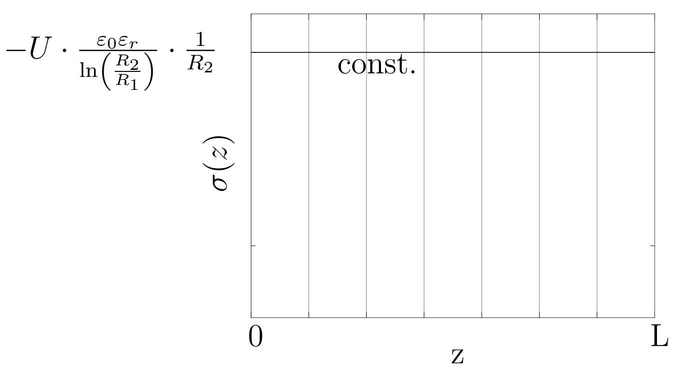


d) Die Ladung im flüssigkeitsgefüllten Teil (Q_1) berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= U \cdot C_1 \\
&= U \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, z}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}
\end{aligned}$$

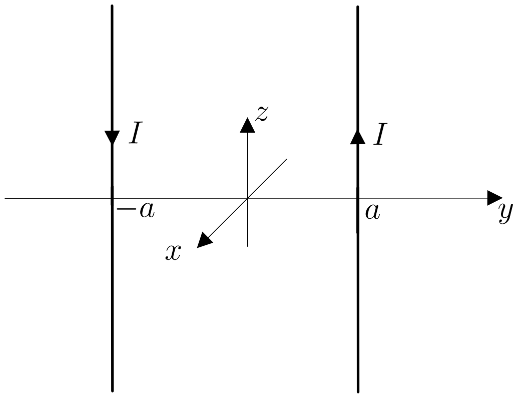
Die Flächenladungsdichte ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{-Q_1}{A} \\
&= -U \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, z}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \frac{1}{2\pi R_2 z} \\
&= -U \cdot \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \frac{1}{R_2}
\end{aligned}$$



Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben sind zwei unendlich ausgedehnte Linienleiter in z-Richtung. Die Linienleiter schneiden die y-Achse mit dem Abstand a und $-a$ zum Ursprung. Der Strom I fließt durch die Linienleiter in die jeweils entgegengesetzte Richtung.



a) Geben Sie die magnetische Feldstärke in der y-z-Ebene an.
   Verwenden Sie dazu kartesische Koordinaten. (2)
   Hinweis: Die Formel muss nicht hergeleitet werden.

b) Berechnen Sie das Vektorpotential in der x-y-Ebene für $z = 0$.
   Verwenden Sie dazu das Coulombintegral für Linienleiter. (8)
   Hinweis: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$

c) Geben Sie das Vektorpotential im gesamten Raum an. Begründen Sie Ihre Antwort. (2)

d) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke in der y-z-Ebene aus dem Vektorpotential. (4)
   Hinweis: Wenn Sie c) nicht lösen konnten verwenden Sie:

$$A_z(x, y, z) = C \cdot \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}}$$

Loesung 3 (16 Punkte)

Musterlösung der Aufgabe 4

a) Vorzeichen kann durch Rechte-Hand-Regel für $y = 0$ ermittelt werden

$$H_x(y,z) = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{y+a} - \frac{1}{y-a}\right)$$

b) Coulomb-Integral für Linienleiter:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Superposition zweier Leiter:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\left(\int \frac{d\vec{s}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int \frac{d\vec{s}\,''}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}\right)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ z\,' \end{pmatrix} \quad \vec{r}\,'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ z\,'' \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \begin{vmatrix} x \\ y-a \\ z\,' \end{vmatrix} = \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z\,'^2)}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,''| = \begin{vmatrix} x \\ y+a \\ z\,'' \end{vmatrix} = \sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z\,''^2)}$$

$$d\vec{s}\,' = dz\,'\vec{e}_z \quad d\vec{s}\,'' = -dz\,''\vec{e}_z$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu I}{4\pi}\left(\int \frac{dz\,'}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z\,'^2)}} - \int \frac{dz\,''}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z\,''^2)}}\right)\vec{e}_z$$

1. Integration von -L bis L
2. Ausnutzung der Symmetrie zur $x-y$-Ebene
3. Integration von 0 bis L

$$\vec{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu I}{2\pi}\left(\int_0^L \frac{dz\,'}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z\,'^2)}} - \int_0^L \frac{dz\,''}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z\,''^2)}}\right)\vec{e}_z$$

Integration nach mathematischer Formelsammlung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu I}{2\pi}\left(\left[\ln\left|z\,' + \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z\,'^2)}\right|\right]_0^L - \left[\ln\left|z\,'' + \sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z\,''^2)}\right|\right]_0^L\right)\vec{e}_z$$

Für $L \to \infty$ fällt obere Integrationsgrenze aus Gleichung

$$\vec{A}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \frac{\mu I}{2\pi}\left(-\ln\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\ln\sqrt{x^2+(y+a)^2}\right)\vec{e}_z$$

Vektorpotential in der $x-y-$ Ebene für $z=0$:

$$A_z\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}$$

c) Aufgrund der unendlichen Ausdehnung ist das Vektorpotential in der $x-y-$ Ebene bei $z=0$ gleich dem Vektorpotential entlang der z-Achse.

$$\vec{A}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \vec{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{A} &= \vec{B} = \mu\vec{H}\\ &= \mu\left(H_x\vec{e}_x + H_y\vec{e}_y + H_z\vec{e}_z\right)\end{aligned}$$

In $y-z$-Ebene existiert nur x-Komponente

$$\begin{aligned}\mu H_x &= \frac{\delta A_z}{\delta y} - \frac{\delta A_y}{\delta z}\\ &= \frac{\delta}{\delta y}\frac{I}{4\pi}\left(\ln\sqrt{x^2+(y+a)^2} - \ln\sqrt{x^2+(y-a)^2}\right)\\ &= \frac{I}{2\pi}\left(\frac{y+a}{x^2+(y+a)^2)} - \frac{y-a}{x^2+(y-a)^2)}\right)\end{aligned}$$

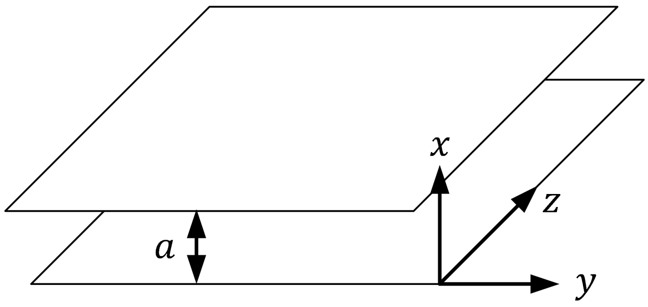
In $y-z$-Ebene gilt $x=0$

$$H_x(y,z) = \tfrac{I}{2\pi}\left(\tfrac{1}{y+a} - \tfrac{1}{y-a}\right)$$

Ergebnis ist äquivalent zu a)

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei ein Schichtwellenleiter bestehend aus zwei ideal leitenden Platten, die in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnt sind. Hierbei sind die Platten im Abstand a parallel zueinander gelegen und von Vakuum umgeben.



Zwischen den Platten breitet sich eine TE-Welle in positive z-Richtung aus. Allgemein kann für die Feldkomponenten der geführten Wellen folgender harmonischer Ansatz gemacht werden:

$$E_x = -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$
$$E_y = -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$
$$H_x = -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$
$$H_y = -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

Im Folgenden sollen die Feldkomponenten exakt ermittelt werden.

a) Durch welche Feldkomponenten ist eine TE-Welle in z-Richtung im Allgemeinen definiert? (1)

b) Geben Sie die relevanten Randbedingungen für das elektrische Feld an. Begründen Sie Ihre Antwort. (2)

c) Berechnen Sie alle Feldkomponenten der TE-Welle indem Sie zunächst die Longitudinalkomponente durch Separation der Variablen ermitteln. Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus der vorherigen Teilaufgabe aus. (8)

d) Berechnen Sie die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit der ersten Mode ($m = 1$) in Abhängigkeit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0. Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Energie im Hohlleiter aus? (5)

Loesung 4 (16 Punkte)

a) Eine transversal-elektrische Welle (TE-Welle), die sich in positive z-Richtung ausbreitet setzt sich allgemein aus folgenden Feldkomponenten zusammen: H_x, H_y, H_z, E_x und E_y.

b) Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes wird aufgrund der Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche des Wellenleiters null, da die Leiterplatten ideal leitend sind. Da es keine Longitudinalkomponente des elektrischen Feldes gibt, verbleibt als einzige mögliche Bedingung daher $E_y(x=0) = E_y(x=a) = 0$.

c) Sowohl das elektrische, als auch das magnetische Feld müssen die allgemeine Wellengleichung erfüllen. Für harmonische Anregung (und homogene Medien) lautet sie

$$\Delta\vec{H} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \Leftrightarrow \Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = 0,$$
$$\text{mit } k^2 = \omega^2\mu\epsilon \text{ und } \Delta\vec{E} = \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z}.$$

In diesem Fall ist die Wellengleichung nach den Vektorkomponenten separierbar, d.h. für die Longitudinalkomponente kann eine skalare Gleichung $\Delta H_z + k^2 H_z = 0$ aufgestellt werden. Die Ableitung der H_z-Komponente in y-Richtung entfällt aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Schichtwellenleiters in dieser Richtung.

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \omega^2\mu\epsilon H_z = 0$$

Aufgrund der Randbedingungen bilden sich in x-Richtung feste Feldverteilungen (Interferenzmuster, Moden) aus, die sich entlang des Schichtwellenleiters in positive z-Richtung ausbreiten. Es wird folgender Separationsansatz gewählt:

$$H_z(x,z,t) = P(x)e^{j(\omega t - k_z z)},$$
$$\text{mit } \frac{\partial^2 e^{j(\omega t - k_z z)}}{\partial z^2} = (-jk_z)^2 e^{j(\omega t - k_z z)} = -k_z^2 e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Einsetzen des Ansatzes in die Wellengleichung ergibt mit

$$P(x)(-k_z^2 e^{j(\omega t - k_z z)}) + e^{j(\omega t - k_z z)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} + \omega^2\mu\epsilon P(x)e^{j(\omega t - k_z z)} = 0.$$

Division durch den ursprünglichen Ansatz für H_z führt auf

$$\frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} + \omega^2\mu\epsilon - k_z^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} = k_z^2 - \omega^2\mu\epsilon = const. = -k_x^2$$

Es ergibt sich eine partielle Differentialgleichung. Die rechte Seite der Gleichung ist konstant und unabhängig von x. Folglich muss Selbiges auch für die linke Seite der Gleichung gelten. Der Lösungsansatz für diese Differentialgleichung ist eine Funktion, deren zweite Ableitung die Funktion selbst ist, allgemein z.B.

$$P(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x).$$

Dieser Lösungsansatz muss zusammen mit $E_z = 0$ in die in der Aufgabenstellung gegebene Gleichung für die E_y-Komponente eingesetzt werden, für welche die Randbedingungen vorliegen.

$$E_y = -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\left(-j\omega\mu\frac{\partial[A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)]e^{j(\omega t - k_z z)}}{\partial x}\right)$$
$$\Leftrightarrow E_y = \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\left[Ak_x\cos(k_x x) - Bk_x\sin(k_x x)\right]e^{j(\omega t - k_z z)}$$

- $E_y(x=0) = \frac{j\omega\mu A}{k_x^2} k_x \exp(j(\omega t - k_z z)) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $E_y(x=a) = -\frac{j\omega\mu B}{k_x^2} k_x \sin(k_x a) \exp(j(\omega t - k_z z)) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow k_x a = m\pi, m = 1, 2, 3, ...$

Die vollständige Lösung für die Feldkomponenten ist folglich:

$$\begin{aligned}
H_z &= B \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= \frac{jk_z}{k_x} B \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\
E_x &= 0 \\
H_y &= 0 \\
E_y &= \frac{j\omega\mu}{k_x} B \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)}
\end{aligned}$$

d) Im ersten Schritt wird aus der Wellengleichung die Wellenzahl k_z bestimmt, wobei die Ergebnisse aus c) Anwendung finden.

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon H_z = 0$$

Einsetzen von H_z aus c) ergibt:

$$\begin{aligned}
\left(-k_z^2 - k_x^2 + \omega^2 \mu \epsilon\right) H_z &= 0 \\
\Leftrightarrow -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 H_z - k_z^2 H_z + \omega^2 \mu \epsilon H_z &= 0 \\
\Leftrightarrow -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k_z^2 + \omega^2 \mu \epsilon &= 0 \\
\Leftrightarrow k_z &= \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Die Phasengeschwindigkeit beträgt

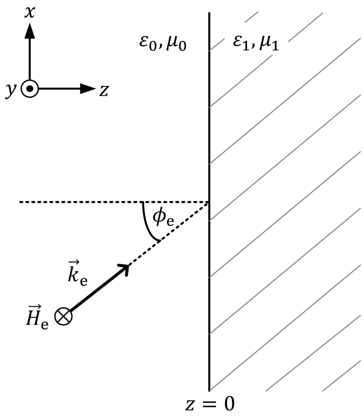
$$v_{ph} = c = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c_0^2} - \left(\frac{m\pi}{a\omega}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi c_0}{a\omega}\right)^2}} > c_0.$$

Die Gruppengeschwindigkeit beträgt

$$\begin{aligned}
v_{gr} &= \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{1}{\frac{\partial k_z}{\partial \omega}} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \omega} \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{2\omega\mu\epsilon}{2\sqrt{\omega^{s2} \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}{\omega \mu \epsilon} \\
&= c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi c_0}{a\omega}\right)^2} < c_0.
\end{aligned}$$

Die Information und Energie der Welle breiten sich mit Gruppengeschwindigkeit aus. Diese ist stets geringer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Lediglich die Phase bzw. das Interferenzmuster kann sich mit grösserer Geschwindigkeit fortpflanzen.

Aufgabe 5 (16 Punkte)



Eine homogene, transversale, ebene elektromagnetische Welle breitet sich im Vakuum aus und trifft unter dem Einfallswinkel ϕ_e auf eine Grenzfläche bei $z = 0$. Der Raum jenseits der Grenzfläche, d.h. der Halbraum mit $z > 0$, ist mit einem Dielektrikum mit den Materialkonstanten ϵ_1 und $\mu_1 = \mu_0$ gefüllt.

Gegeben sei folgender harmonischer Ansatz für das magnetische Feld.

$$\begin{aligned}
\vec{H}_e &= -H_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e \vec{r}\right)} \vec{e}_y, \\
\vec{H}_r &= -H_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \vec{e}_y, \\
\vec{H}_t &= -H_t e^{j\left(\omega t - \vec{k}_t \vec{r}\right)} \vec{e}_y, \\
\text{mit} \quad \vec{r} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

a) Geben Sie für die einfallende Welle die Komponenten des Wellenvektors $\vec{k}_e$ an. 1

b) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle $\vec{E}_e$ in Abhängigkeit von $\vec{H}_e$ unter Verwendung der allgemein gültigen Maxwellgleichungen. Zeichnen Sie den E-Feld-Vektor $\vec{E}_e$ in die Abbildung in der Aufgabenstellung ein. Handelt es sich bei der vorliegenden Welle um eine TE- oder eine TM-Welle? Begründen Sie. 4

c) Geben Sie die Wellenvektoren und die elektrischen Felder der reflektierten und transmittierten Welle an. Nutzen Sie dazu aus, dass es sich um eine Transversalwelle handelt. 3

Hinweis: Eine Herleitung der Gleichungen ist nicht erforderlich.

d) Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T in Bezug auf die Amplitude des elektrischen Feldes für $t = 0$ und $\vec{r} = 0$. 4

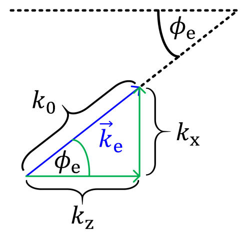
e) Unter welchem Einfallswinkel kommt es zu der besonderen Situation, dass $\phi_e + \phi_t = 90°$? Gesucht ist ein mathematischer Ausdruck für den Winkel. 4

Hinweis: Leiten Sie sich zunächst das Snelliussche Brechungsgesetz her und machen Sie sich dieses anschließend zu Nutze.

Loesung 5 (16 Punkte)

a) Es lässt sich mit Hilfe geometrischer Beziehungen (siehe Abbildung) leicht zeigen, dass der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle wie folgt definiert ist:

$$\vec{k}_e = k_0 \sin(\phi_e)\,\vec{e}_x + k_0 \cos(\phi_e)\,\vec{e}_z, \text{ mit } k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}.$$



b) Zunächst gilt mit dem Ergebnis aus a) für das magnetische Feld

$$\vec{H}_e = -H_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e \vec{r}\right)}\vec{e}_y = -H_e e^{j(\omega t - [k_0 \sin(\phi_e)\vec{e}_x + k_0\cos(\phi_e)\vec{e}_z][x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z])}\vec{e}_y$$
$$= -H_e e^{j(\omega t - [k_0\sin(\phi_e)x + k_0\cos(\phi_e)z])}\vec{e}_y.$$

Wir wählen eine der beiden Rotationsgleichungen aus, z.B. $rot\,\vec{H}_e = \epsilon\frac{\partial \vec{E}_e}{\partial t}$. Aus der Formelsammlung kann die allgemeine Definition der mathematischen Rotation abgelesen werden. Der Ausdruck kann vereinfacht werden, da die Wellenfront der ebenen Welle in y-Richtung unendlich ausgedehnt ist ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$) und das magnetische Feld gemäß Aufgabenstellung nur in y-Richtung schwingt ($H_{e,x} = H_{e,z} = 0$). Vorsicht: es gilt weder $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, noch $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, da sich die ebene Welle nicht entlang einer der Koordinatenachsen ausbreitet, sondern in einem Winkel ϕ_e zur z-Achse.

$$rot\,\vec{H}_e = \vec{e}_x\left(\frac{\partial H_{e,z}}{\partial y} - \frac{\partial H_{e,y}}{\partial z})\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial H_{e,x}}{\partial z} - \frac{\partial H_{e,z}}{\partial x})\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial H_{e,y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{e,x}}{\partial y})\right)$$
$$= -\vec{e}_x\frac{\partial H_{e,y}}{\partial z} + \vec{e}_z\frac{\partial H_{e,y}}{\partial x}$$

Durch Einsetzen von $\vec{H}_e$ und Berechnen der Ableitungen ergibt sich aus der Maxwellgleichung

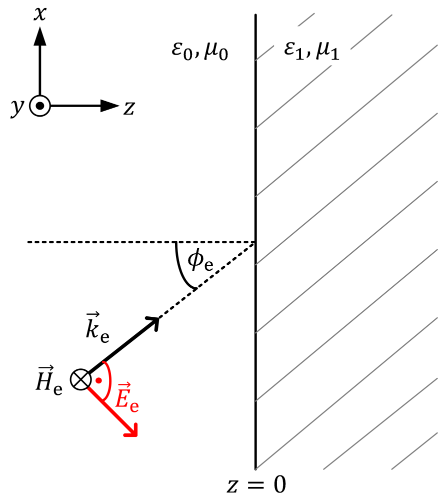
$$jk_0\vec{H}_e\left(+\cos(\phi_e)\,\vec{e}_x - \sin(\phi_e)\,\vec{e}_z\right) = \epsilon_0 j\omega\vec{E}_e$$
$$\leftrightarrow \vec{E}_e = \frac{k_0}{\epsilon_0\omega}H_e e^{j\left(\omega t - \vec{k}_e\vec{r}\right)}\left(-\cos(\phi_e)\,\vec{e}_x + \sin(\phi_e)\,\vec{e}_z\right), \text{ mit } \frac{k_0}{\epsilon_0\omega} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \Gamma_0.$$

Die rot markierten Elemente müssen hinzugefügt werden. Es handelt sich um eine TM-Welle (oder auch parallel polarisierte Welle), da das elektrische Feld in der Einfallsebene liegt.

c) Mit den Ansätzen und Hinweisen aus der Aufgabenstellung ergeben sich folgende Wellenvektoren und elektrischen Feldvektoren.

$$\vec{k}_r = k_0\sin(\phi_r)\,\vec{e}_x - k_0\cos(\phi_r)\,\vec{e}_z,$$
$$\vec{k}_t = k_1\sin(\phi_t)\,\vec{e}_x + k_1\cos(\phi_t)\,\vec{e}_z,$$
$$\vec{E}_r = \Gamma_0 H_r e^{j\left(\omega t - \vec{k}_r\vec{r}\right)}\left(cos(\phi_e)\,\vec{e}_x + \sin(\phi_e)\,\vec{e}_z\right),$$
$$\vec{E}_t = \Gamma_1 H_t e^{j\left(\omega t - \vec{k}_t\vec{r}\right)}\left(-cos(\phi_t)\,\vec{e}_x + \sin(\phi_t)\,\vec{e}_z\right).$$

Das Vorzeichen des Wellenwiderstandes ist hier stets positiv zu wählen, da sich die Schwingungsrichtung aus dem winkelabhängigen Term in der Klammer ergibt.



d) An der Grenzfläche müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Felder stetig sein. Mit $t = 0$ und $\vec{r} = 0$ entfallen die Exponentialterme und es folgt

$$H_{t,y} = H_{e,y} + H_{r,y},$$
$$E_{t,x} = E_{e,x} + E_{r,x}, \Leftrightarrow -H_t \cos(\phi_t)\Gamma_1 = -H_e \cos(\phi_e)\Gamma_0 + H_r \cos(\phi_r)\Gamma_0$$

Elimination von H_t durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite Gleichung und Anwendung des Reflexionsgesetzes $\phi_r = \phi_e$ ergibt:

$$-\Gamma_0 H_e \cos(\phi_e) + \Gamma_0 H_r \cos(\phi_e) = -\Gamma_1 H_e \cos(\phi_t) - \Gamma_1 H_r \cos(\phi_t)$$
$$\Leftrightarrow R = \frac{E_r}{E_e} = \frac{H_r}{H_e} = \frac{\Gamma_0 \cos(\phi_e) - \Gamma_1 \cos(\phi_t)}{\Gamma_0 \cos(\phi_e) + \Gamma_1 \cos(\phi_t)}$$

Elimination von H_r mit $H_r = H_t - H_e$ ergibt analog:

$$-\Gamma_0 H_e \cos(\phi_e) + \Gamma_0 H_t \cos(\phi_e) - \Gamma_0 H_e \cos(\phi_e) = -\Gamma_1 H_t \cos(\phi_t)$$
$$\Leftrightarrow \frac{H_t}{H_r} = \frac{2\Gamma_0 \cos(\phi_e)}{\Gamma_0 \cos(\phi_e) + \Gamma_1 \cos(\phi_t)}$$

Mit $\frac{E_t}{E_e} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\frac{H_t}{H_e}$ folgt damit:

$$T = \frac{E_t}{E_r} = \frac{2\Gamma_1 \cos(\phi_e)}{\Gamma_0 \cos(\phi_e) + \Gamma_1 \cos(\phi_t)}$$

e) Das Snelliussche Brechungsgesetz lautet $k_0 \sin(\phi_e) = k_1 \sin(\phi_t)$. Es kann über die Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $E_{e,x} + E_{r,x} = E_{t,x}$ für $t = 0$, $z = 0$ (Grenzfläche) und $\vec{r} = x\vec{e}_x$ hergeleitet werden. Durch Einsetzen von k_0 und k_1 und Berechnen des Skalarproduktes ergibt sich

- $-\Gamma_0 H_e \cos(\phi_e) e^{-jk_0 \sin(\phi_e)x} + \Gamma_0 H_r \cos(\phi_e) e^{-jk_0 \sin(\phi_e)x} = -\Gamma_1 H_t \cos(\phi_t) e^{-jk_1 \sin(\phi_t)x}$
- $-\Gamma_0 H_e \cos(\phi_e) + \Gamma_0 H_r \cos(\phi_e) = -\Gamma_1 H_t \cos(\phi_t)$

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Tatsache, dass die erste Gleichung für alle x und daher auch für $x = 0$ erfüllt sein muss. Einsetzen von Gleichung 2 in Gleichung 1:

$$\Gamma_0 H_e \cos(\phi_e) e^{-jk_0 \sin(\phi_e)x} + \Gamma_0 H_r \cos(\phi_e) e^{-jk_0 \sin(\phi_e)x} = -\Gamma_0 H_e \cos(\phi_e) e^{-jk_1 \sin(\phi_t)x} + \Gamma_0 H_r \cos(\phi_e) e^{-jk_1}$$

Es kann leicht abgelesen werden, dass die Gleichung genau dann gilt, wenn das Snelliussche Brechungsgesetzt erfüllt ist.

Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung, dass $\phi_e + \phi_t = 90°$, folgt

$$\begin{aligned} k_0 \sin(\phi_e) &= k_1 \sin(\phi_t) = k_1 \sin(90° - \phi_e) = k_1 \cos(\phi_e) \\ \Leftrightarrow k_0 \sin(\phi_e) = k_1 \cos(\phi_e) \Leftrightarrow \frac{\sin(\phi_e)}{\cos(\phi_e)} &= \frac{k_1}{k_0} \Leftrightarrow \tan(\phi_e) = \frac{k_1}{k_0} \\ \Leftrightarrow \phi_e = \arctan\left(\frac{k_1}{k_0}\right) = \arctan\left(\frac{n_1}{n_0}\right) &= \arctan\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_0}}\right) = \arctan\left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}\right). \end{aligned}$$

Die parallel polarisierte Welle erfährt bei Einfall mit diesem Brewster-Winkel keinerlei Reflexion an der Grenzfläche. Alternativ kann zur Berechnung daher der Zähler des Reflexionsfaktors null gesetzt und geschickt die Nebenbedingung aus der Aufgabenstellung ausgenutzt werden.