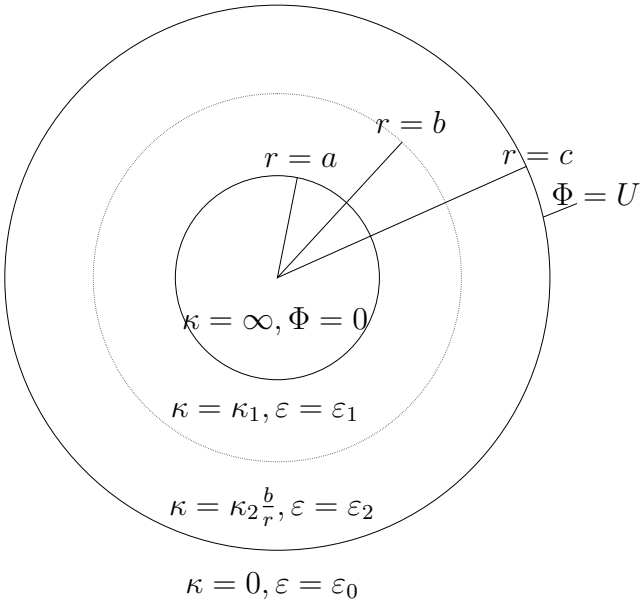
Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben ist ein verlustbehafteter Kondensator mit kugelsymmetrischem Aufbau. Die Materialeigenschaften und die angelegte Spannung sind der folgenden Querschnittszeichnung zu entnehmen:



Betrachtet wird der stationäre Fall.

a) Existiert eine r-Abhängigkeit des Stromes? (Mit Begründung!) Welche Bedingung muss daher für die Stromdichten $\vec{j}(r)$ gelten?

b) Berechnen Sie den Strom I in Abhängigkeit der Spannung U! Geben Sie den ohmschen Widerstand der Anordnung an!

c) Berechnen Sie $\vec{E}$, ρ und σ im Bereich $0 \leq r \leq c$ in Abhängigkeit von der Spannung U, dem Widerstand R sowie den Materialkonstanten und Radien!

d) ε_2 sei nun abhängig vom Radius r. Wie muss $\varepsilon_2(r)$ gewählt werden, damit sich das konstante $\rho(r) = \rho_2$ $(\rho_2 < 0)$ einstellt für $b < r < c$? Geben Sie $\varepsilon_2(r)$ in Abhängigkeit von der Spannung U, dem Widerstand R sowie den Materialkonstanten und Radien an!

Lösung 1 (16 Punkte)

a) Der Strom kann keine r-Abhängigkeit haben, da sich sonst Ladung anstauen würde.

$$\vec{j} = -\frac{I}{4\pi r^2}\vec{e_r}$$

b) Es muss gelten

$$\begin{aligned} U = \Phi(c) - \Phi(a) &= -\int_a^c \vec{E}(r)\vec{e_r}dr = -\int_a^c \frac{\vec{j}(r)}{\kappa(r)}\vec{e_r}dr \\ &= \int_a^c \frac{I}{4\pi r^2\kappa(r)} = \frac{I}{4\pi}\left(\int_a^b \frac{1}{r^2\kappa_1}dr + \int_b^c \frac{1}{rb\kappa_0}dr\right) \\ &= \frac{I}{4\pi}\left(\left[-\frac{1}{\kappa_1 r}\right]_a^b + \ln\left(\frac{c}{b}\right)\frac{1}{b\kappa_0}\right) \\ &= \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{a\kappa_1} - \frac{1}{b\kappa_1} + \ln\left(\frac{c}{b}\right)\frac{1}{b\kappa_0}\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a\kappa_1} - \frac{1}{b\kappa_1} + \ln\left(\frac{c}{b}\right)\frac{1}{b\kappa_0}\right)$$

c) Wegen $\kappa = \infty$ für $r < a$ gilt dort $\vec{E} = 0, \rho = 0$.
Für $a \leq r \leq c$ gilt:

$$\vec{j}(r) = -\frac{I}{4\pi r^2}\vec{e_r}$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{I}{4\pi r^2\kappa(r)}\vec{e_r}$$

$$\rho(r) = \varepsilon div\vec{E}$$

Für $a \leq r \leq b$:

$$\rho(r) = div\left(\varepsilon\frac{-I}{4\pi r^2\kappa_1}\right) = \frac{1}{r^2}\cdot 0 = 0$$

Für $b \leq r \leq c$:

$$\rho(r) = div\left(\varepsilon \frac{-I}{4\pi r b \kappa_0}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_2 \frac{-Ir}{4\pi b \kappa_0}\right) = \frac{-I}{4\pi r^2 \kappa_0}$$

Die auftretenden Flächenladungsdichten sind:

$$\sigma(r=a) = D(a+) - D(a-) = D(a+) = -\varepsilon_1 \frac{I}{4\pi a^2 \kappa_1} = -\varepsilon_1 \frac{U}{4\pi R a^2 \kappa_1}$$

$$\sigma(r=b) = D(b+) - D(b-) = -\varepsilon_2 \frac{I}{4\pi b^2 \kappa_0} + \varepsilon_1 \frac{I}{4\pi b^2 \kappa_1} = \frac{U}{4\pi R b^2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} - \frac{\varepsilon_2}{\kappa_0}\right)$$

$$\sigma(r=c) = D(c+) - D(c-) = -D(c-) = \varepsilon_2 \frac{I}{4\pi c b \kappa_0} = \varepsilon_2 \frac{U}{4\pi c b R \kappa_0}$$

d) Es ist

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_2(r) \frac{-Ir}{4\pi b \kappa_0}\right)$$

Damit dieser Ausdruck konstant wird, muss $\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_2(r)\frac{-Ir}{4\pi b\kappa_0}\right)$ proportional zu r^2 sein, d.h. $\varepsilon_2(r)\frac{-Ir}{4\pi b\kappa_0}$ muss proportional zu r^3 sein. Das bedeutet, $\varepsilon_2(r)$ hat die Form $\varepsilon_{2,0} r^2$. Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_{2,0} r^2 \frac{-Ir}{4\pi b \kappa_0}\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\varepsilon_{2,0}\frac{-3Ir^2}{4\pi b\kappa_0} \\ &= \varepsilon_{2,0}\frac{-3I}{4\pi b \kappa_0}\end{aligned}$$

Gleichsetzen mit ρ_2 und Auflösen nach $\varepsilon_{2,0}$ ergibt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2,0} &= \rho_2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_{2,0} r^2 \frac{-Ir}{4\pi b\kappa_0}\right) \\ &= \frac{-4\pi b \kappa_0}{3I}\end{aligned}$$

Damit muss also gelten:

$$\varepsilon_2(r) = \frac{-4\pi b \kappa_0 r^2}{3I} = \frac{-4\pi b \kappa_0 R r^2}{3U}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

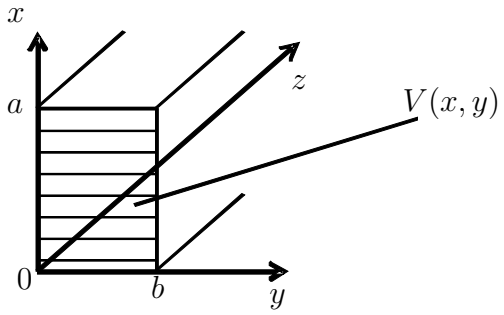


Abbildung 1: Rechteckiger Hohlleiter

Gegeben ist ein in positiver z-Richtung unendlich ausgedehnter Hohlkörper mit rechteckigem Querschnitt. Das Potential auf den Wänden beträgt 0. Für $z \geq 0$ gilt für das Potential Φ also:

$$\Phi(0, y, z) = \Phi(a, y, z) = 0 \mid 0 \leq y \leq b$$
$$\Phi(x, 0, z) = \Phi(x, b, z) = 0 \mid 0 \leq x \leq a$$

In der Ebene $z = 0$ sei das Potential über dem Querschnitt vorgegeben:

$$\Phi(x, y, 0) = V(x, y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

Gesucht ist eine Lösung für die das Potential für $z \to \infty$ verschwindet.

Hinweis: *Das Potential besitzt eine Abhängigkeit in z-Richtung.*

a) Separieren Sie die Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ des Potentials $\Phi(x, y, z)$ mit dem Produktansatz $\Phi(x, y, z) = \Phi_x(x) \cdot \Phi_y(y) \cdot \Phi_z(z)$ (mit Rechnung). Achten Sie dabei auf eine geschickte Wahl des Vorzeichens der Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ (mit Begründung).

   Hinweis: *Das Potential soll für $z \to \infty$ verschwinden. Benutzen Sie daher einen Ansatz mit einer e-Funktion für die z-Abhängigkeit.*

b) Geben Sie die die Funktionen $\Phi_x(x), \Phi_y(y), \Phi_z(z)$ inklusive aller freien Parameter an, die sich aus der Wahl der Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ ergeben.

c) Bestimmen Sie nach Möglichkeit alle freien Parameter des Lösungsansatzes der Differentialgleichung anhand der gegebenen Randbedingungen. Für die Erfüllung einer beliebigen Randbedingung $V(x, y)$ bei $z = 0$ ist ein Reihensansatz aus der Überlagerung aller allgemeinen Lösungen notwendig. Geben Sie diesen Reihenansatz für $\Phi(x, y, z)$ an.

   Hinweis: $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$

d) Es liegt nun folgende Gesamtlösung des Potentials $\Phi(x, y, z)$ vor:

$$\Phi(x, y, z) = V_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{2\pi y}{b}) e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2 + (\frac{2\pi}{b})^2} z}$$

   Geben Sie anhand dieses Potentials die noch nicht bestimmten Koeffizienten des zuvor ermittelten Reihenansatzes an.

e) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ zwischen den Platten aus dem in Aufgabenteil d) angegebenen Potential $\Phi(x, y, z)$.

Lösung 2 (16 Punkte)

a)

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Produktansatz: $\Phi(x,y,z) = \Phi_x(x) \cdot \Phi_y(y) \cdot \Phi_z(z)$

$$\Rightarrow \Delta\Phi(x,y,z) = \Phi_y(y)\Phi_z(z)\frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2} + \Phi_x(x)\Phi_z(z)\frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2} + \Phi_x(x)\Phi_y(y)\frac{\partial^2\Phi_z(z)}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \underbrace{\frac{1}{\Phi_x(x)}\frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2}}_{konst} + \underbrace{\frac{1}{\Phi_y(y)}\frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2}}_{konst} + \underbrace{\frac{1}{\Phi_z(z)}\frac{\partial^2\Phi_z(z)}{\partial z^2}}_{konst} = 0 \tag{3}$$

Die Konstanten $\pm k_x^2, \pm k_y^2, \pm k_z^2$ werden anhand der Randbedingungen gewählt. Damit das Potential auf dem Rand Null wird werden die Konstanten für die x- und y-Abhängigkeit wie folgt gewählt:

$$\frac{1}{\Phi_x(x)}\frac{\partial^2\Phi_x(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 \tag{4}$$

$$\frac{1}{\Phi_y(y)}\frac{\partial^2\Phi_y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 \tag{5}$$

Der daraus resultierende Sinus-Term in $\Phi_x(x)$ und $\Phi_y(y)$ genügt der Randbedingung bei $x = 0$ und $y = 0$. Damit für $z \to \infty$ das Potential verschwindet wird ein Ansatz mit einer e-Funktion benötigt. Die Konstante k_z wird daher gewählt zu:

$$\frac{1}{\Phi_z(z)}\frac{\partial^2\Phi_z(z)}{\partial z^2} = +k_z^2 \tag{6}$$

b) Daraus folgen die allgemeinen Gleichungen für $\Phi_x(x), \Phi_y(y), \Phi_z(z)$:

$$\Phi_x(x) = a_x \cos(k_x x) + b_x \sin(k_x x) \tag{7}$$

$$\Phi_y(y) = a_y \cos(k_y y) + b_y \sin(k_y y) \tag{8}$$

$$\Phi_z(z) = a_z e^{k_z z} + b_z e^{-k_z z} \tag{9}$$

c) Damit die Randbedingungen bei $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt sind muss $a_x = 0$ und $a_y = 0$ gelten. Das Potential verschwindet für $z \to \infty$ wenn $a_z = 0$ gilt.

$$\Phi(x,y,z) = b_x \sin(k_x x) \cdot b_x \sin(k_y y) \cdot b_z e^{-k_z z} \tag{10}$$
$$= B \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot e^{-k_z z} \tag{11}$$

Aus $\Phi(a,y,z) = \Phi(x,b,z) = 0$ folgt für k_x und k_y:

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \ |n = 1,2,3,... \tag{12}$$
$$k_y = \frac{m\pi}{b} \ |m = 1,2,3,... \tag{13}$$

Aus $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ folgt:

$$k_z = \sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2} \tag{14}$$

eingesetzt ergibt dies:

$$\Phi(x,y,z) = B \cdot sin(\frac{n\pi}{a}x) \cdot sin(\frac{m\pi}{b}y) \cdot e^{-\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2}z} \tag{15}$$

Der allgemeine Reihenansatz lautet damit:

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} \cdot \sin(\frac{n\pi}{a}x) \cdot \sin(\frac{m\pi}{b}y) \cdot e^{-\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2}z} \tag{16}$$

d) Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$n = 1 \tag{17}$$
$$m = 2 \tag{18}$$
$$B_{1,2} = V_0, B_{n,m} \text{ sonst } = 0; \tag{19}$$

e) Das $\vec{E}$-Feld berechnet sich mit $\vec{E} = -grad(\Phi)$ zu:

$$\vec{E} = V_0 \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{a}\cos(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{2\pi y}{b})e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z} \\ -\frac{2\pi}{b}\sin(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{2\pi y}{b})e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z} \\ \sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{2\pi y}{b})e^{-\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{2\pi}{b})^2}z} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Eine lange Spule mit Länge l, n_a Windungen und kreisförmigem Querschnitt mit Durchmesser d_a wird vom sinusförmigen Wechselstrom I_a durchflossen.

In allen Aufgabenteilen gelten folgende Annahmen:

- Felder innerhalb von Spulen sind homogen
- Felder außerhalb von Spulen sind zu vernachlässigen

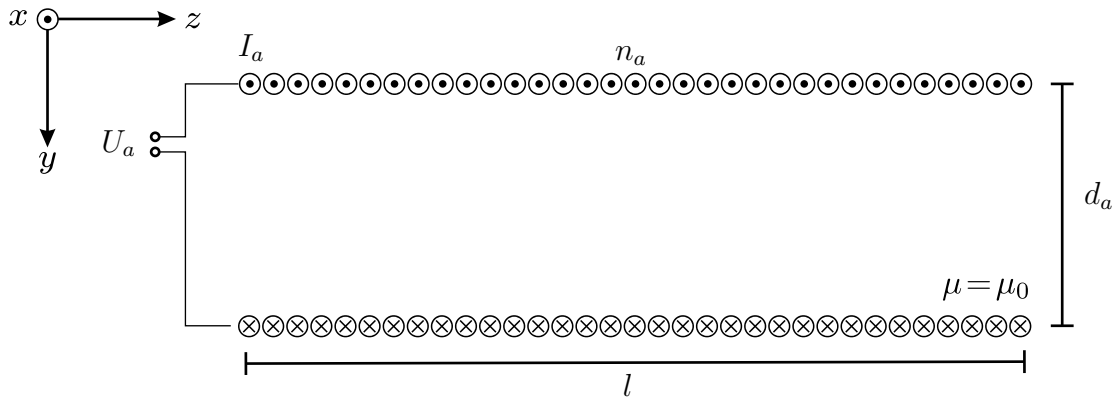


Abbildung 2: Längsansicht der langen Spule

a) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}_a$ innerhalb der Spule.
Skizzieren Sie $\vec{H}_a$ in Abb. 2.

b) Berechnen Sie den selbstinduzierten magnetischen Fluss Φ_{aa} der Spule.
Berechnen Sie den Selbstinduktionskoeffizienten L_{aa}.

Beachten Sie die Fortsetzung auf der folgenden Seite!

Jetzt wird die Spule aus Abb. 2 in eine größere Spule mit n_b Windungen und kreisförmigem Querschnitt eingebracht. Diese äußere Spule besitzt ebenfalls die Länge l, allerdings einen größeren Durchmesser $d_b > d_a$. Die gesamte Anordnung ist in der Querschnittszeichnung Abb. 3 dargestellt.

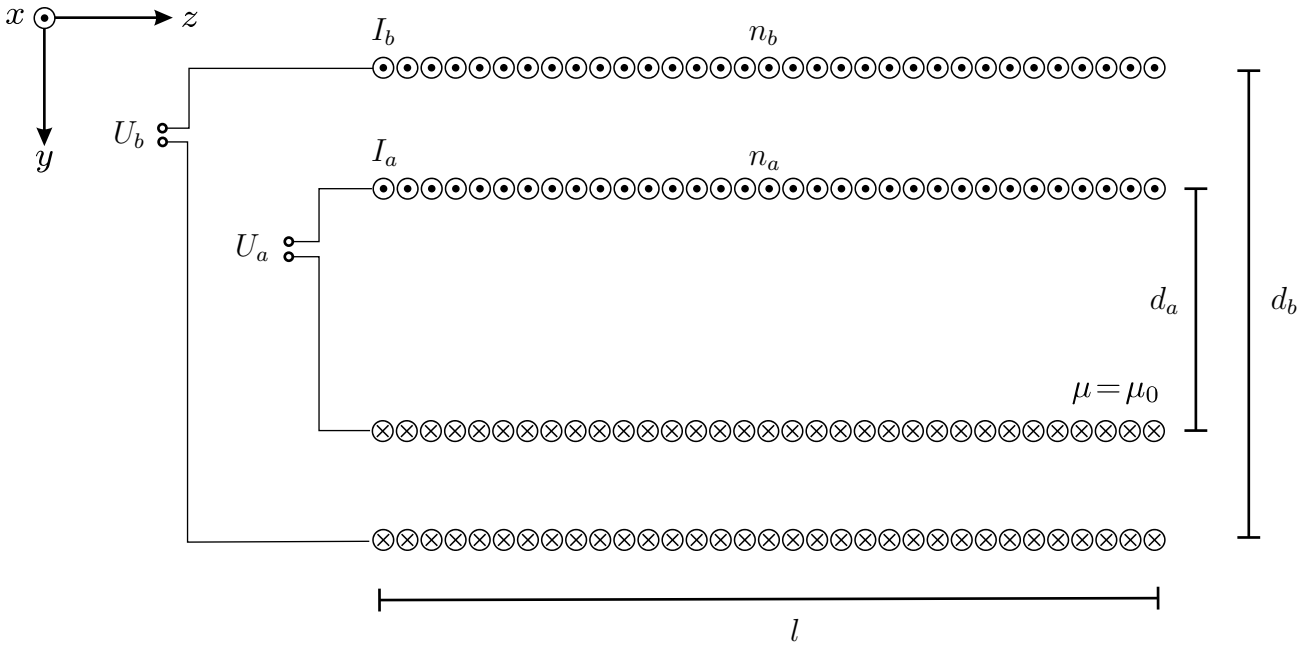


Abbildung 3: Anordnung der inneren und äußeren Spule

c) Ändert sich der Selbstinduktionskoeffizient L_{aa} durch das Einbringen in eine äußere Spule? Begründen Sie!

Berechnen Sie die Induktionskoeffizienten L_{ab}, L_{ba} und L_{bb}.

d) Nun wird betrachtet, wie die Komponenten der magnetischen Flüsse durch die Spulen von den einzelnen Strömen abhängen.

Wie groß ist der Fluss Φ_a in der inneren Spule, wenn $I_a = 0$ ist?

Wie groß ist Φ_a, wenn $I_b = 0$ ist?

Wie groß ist der Fluss Φ_b in der äußeren Spule, wenn $I_a = 0$ ist?

Wie groß ist Φ_b, wenn $I_b = 0$ ist?

e) Die Kontakte der inneren Spule werden nun kurzgeschlossen ($U_a = 0$). Der ohmsche Widerstand der inneren Spule R_a ist zu vernachlässigen, $R_a = 0$. (Hinweis: Dies ist analog zu einer supraleitenden Spule). Der ohmsche Widerstand der äußeren Spule betrage $R_b \neq 0$.

Welche Spannung U_b muss an der äußeren Spule angelegt werden, damit dort der Strom $I_b = I_0 sin(\omega_0 t)$ fließt?

Lösung 3 (16 Punkte)

a) In der Spule liegt aufgrund der Symmetrie lediglich ein Magnetfeld in z-Richtung vor. Das Magnetfeld innerhalb einer langen Spule ist homogen, d.h. die Feldstärke ist konstant. Mit dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H}\ d\vec{s} = I$ ergibt sich dann:

$$H_a l = n_a I_a$$
$$\vec{H}_a = \frac{n_a I_a}{l} \vec{e}_z$$

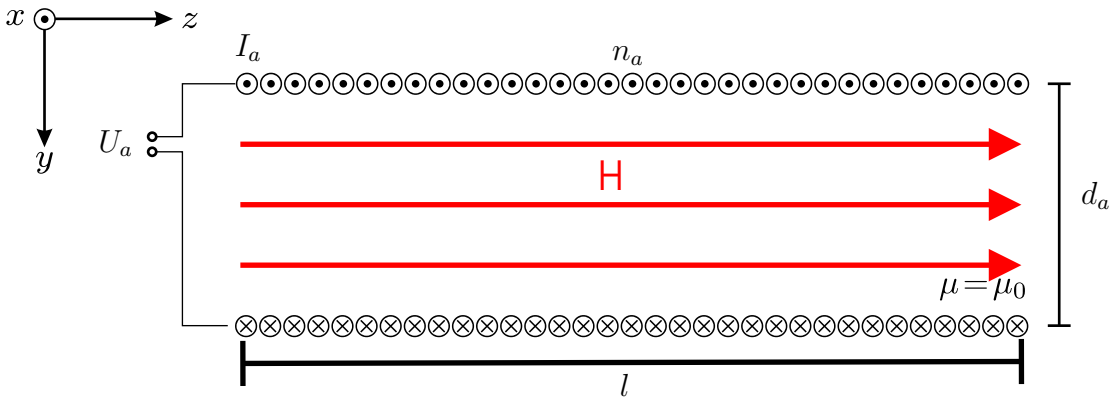


Abbildung 4: Magnetische Feldlinien innerhalb der Spule

b) Die durchflossene Fläche der Spule ist $\pi \frac{d_a^2}{4}$. Der selbstinduzierte magnetische Fluss ist:

$$\Phi_{aa} = \mu_0\, H_a\, \pi \frac{d_a^2}{4}$$

Einsetzen von H_a und Verwendung von $L^{(a)} = \frac{N\Phi^{(a)}}{I}$ aus Formelsammlung ergibt:

$$\Phi_{aa} = \mu_0 \frac{n_a I_a}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$$
$$\Rightarrow L_{aa} = \frac{n_a \Phi_{aa}}{I_a} = \mu_0 \frac{n_a^2}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$$

c) Der Selbstinduktionskoeffizient L_{aa} beschreibt, wie Änderungen des Stroms I_a in der Spule mit einem genau dadurch verursachten magnetischen Fluss Φ_{aa} durch den Querschnitt der Spule gekoppelt sind. Dies ist also eine Eigenschaft der Spule selbst.

Externe magnetische Felder beeinflussen bzw. stören diesen Zusammenhang nicht. Sie werden nach dem Superpositionsprinzip einfach überlagert. Deshalb ist L_{aa} unabhängig vom Magnetfeld, das durch die äußere Spule erzeugt wird, und ändert sich beim Einbringen in eine äußere Spule **nicht**.

Die Selbstinduktivität der äußeren Spule wird analog zur inneren Spule berechnet:

$$L_{bb} = \frac{n_b \Phi_{bb}}{I_b} = \mu_0 \frac{n_b^2}{l} \pi \frac{d_b^2}{4}$$

Bei der Berechnung der Gegeninduktivitäten muss der Querschnitt der **inneren** Spule $\pi\frac{d_b^2}{4}$ berücksichtigt werden:

$$\Phi_{ab} = \mu_0 H_a A_b = \mu_0 \frac{n_a I_a}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$$
$$\Rightarrow L_{ab} = \frac{n_b \Phi_{ab}}{I_a} = \mu_0 \frac{n_a n_b}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$$

und

$$\Phi_{ba} = \mu_0 H_b A_b = \mu_0 \frac{n_b I_b}{l} \pi \frac{d_a^2}{4}$$
$$\Rightarrow L_{ba} = \frac{n_a \Phi_{ba}}{I_b} = \mu_0 \frac{n_a n_b}{l} \pi \frac{d_a^2}{4} = L_{ab}$$

d) Die Formel $L_{ik} = \frac{N_k \cdot \Phi_{m,ik}}{I_i}$ aus der Formelsammlung wird umgeformt zu $\Phi_{ik} = \frac{L_{ik}}{N_k} I_i$ und dann auf die vier Situationen angewandt:

- für $I_a = 0$ gilt: $\Phi_a = \Phi_{ba} = \frac{L_{ba}}{n_a} I_b$
- für $I_b = 0$ gilt: $\Phi_a = \Phi_{aa} = \frac{L_{aa}}{n_a} I_a$
- für $I_a = 0$ gilt: $\Phi_b = \Phi_{bb} = \frac{L_{bb}}{n_b} I_b$
- für $I_b = 0$ gilt: $\Phi_b = \Phi_{ab} = \frac{L_{ab}}{n_b} I_a$

e) Die magnetischen Flüsse in den Spulen überlagern sich (Superpositionsprinzip):

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \Phi_{aa} + \Phi_{ba} \\ &= \frac{L_{aa}}{n_a} I_a + \frac{L_{ba}}{n_a} I_b \\ \Phi_b &= \Phi_{ab} + \Phi_{bb} \\ &= \frac{L_{ab}}{n_b} I_a + \frac{L_{bb}}{n_b} I_b \end{aligned}$$

Ableiten nach der Zeit, Anwenden von Formel $U_{ind,ik} = -N_k \frac{d\Phi_{m,ik}}{dt}$ aus der Formelsammlung und Division durch die Windungszahlen führt zu:

$$U_a = -L_{aa}\dot{I}_a - L_{ab}\dot{I}_b$$
$$U_b = -L_{ab}\dot{I}_a - L_{bb}\dot{I}_b + I_b R_b$$

Einsetzen von $U_a = 0$ in die erste Gleichung ergibt $\dot{I}_a = -\frac{L_{ab}}{L_{aa}} \dot{I}_b$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} U_b &= \left[\frac{L_{ab}^2}{L_{aa}} - L_{bb}\right] \dot{I}_b + I_b R_b \\ &= \mu_0 n_b^2 \frac{\pi}{l} \left[d_a^2 - d_b^2\right] \dot{I}_b + I_b R_b \\ &= \mu_0 n_b^2 \frac{\pi}{l} \left[d_a^2 - d_b^2\right] \omega_0 I_0 \cos(\omega_0 t) + I_0 sin(\omega_0 t) R_b \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Hinweis: Die Teilprobleme b und c sind zusammenhängend, alle anderen Aufgabenteile lassen sich unabhängig voneinander lösen.

a) Eine ebene Welle mit folgenden Feldkomponenten

$$\vec{H}(z,t) = H_o e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y$$
$$\vec{E}(z,t) = E_o e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$$

breitet sich im Vakuum (Leitfähigkeit $\kappa = 0$) in z-Richtung aus. Berechnen Sie mit Kenntnis des Wellenwiderstandes $\Gamma = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ und den Maxwellgleichungen für harmonische Vorgänge die Wellenzahl k_0 in Abhängigkeit von Kreisfrequenz und Materialkonstanten.

b) Eine ebene Welle mit folgenden Feldkomponenten

$$\vec{H}(z,t) = H_o e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_y$$
$$\vec{E}(z,t) = E_o e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_x$$

breitet sich in einem leitfähigen Medium mit der reellen Dielektrizitätskonstanten ε und der Leitfähigkeit κ in z-Richtung aus. Berechnen Sie H_0 als Funktion von E_0 im Medium.

c) Es ist die elektromagnetische Welle aus Teilproblem b mit der gegebenen Wellenzahl $k_1 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{j\kappa}{\omega\varepsilon}}$ im unter Teilproblem b beschriebenen Medium gegeben. Ermitteln Sie anhand der Lösung von Teilaufgabe b den Betrag der Phasenverschiebung zwischen H- und E-Feld im Medium.

d) Eine ebene Welle mit folgenden Feldkomponenten

$$\vec{H}(z,t) = H_o e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_y$$
$$\vec{E}(z,t) = E_o e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_x$$

breitet sich in einem bei $z = 0$ beginnenden leitfähigen Medium mit der reellen Dielektrizitätskonstanten ε und der Leitfähigkeit κ in z-Richtung aus. Nach welcher Distanz im Medium hat die Strahlungsleistung der Welle auf die Hälfte abgenommen? Verwenden Sie für Ihre Berechnung folgende Näherung der Wellenzahl in einem sehr gut leitenden Medium: $k_2 \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}\,(1 - j)$

e) Eine ebene Welle mit folgenden Feldkomponenten

$$\vec{H}(z,t) = H_o e^{j(\omega t - k_3 z)} \vec{e}_y$$
$$\vec{E}(z,t) = E_o e^{j(\omega t - k_3 z)} \vec{e}_x$$

breitet sich im Vakuum (Leitfähigkeit $\kappa = 0$) in z-Richtung aus. Bei $z = 0$ trifft die Welle auf ein ideal leitendes Medium und wird reflektiert. Berechnen Sie das elektrische Feld der reflektierten Welle.

Lösung 4 (16 Punkte)

a) Mittels der Maxwellgleichung:

$$rot\vec{H} = j\omega\varepsilon_0\vec{E}$$

und dem gegebenen Feldern $\vec{E}$ und $\vec{H}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x(H_0 jk_0)e^{j(\omega t - k_o z)} &= j\omega\varepsilon_0 E_o e^{j(\omega t - k_o z)}\vec{e}_x \\
\varepsilon j\omega E_0 &= H_0 jk_0 \\
\frac{E_0}{H_0} &= \frac{k_0}{\varepsilon\omega} \\
\text{mit } \frac{E_0}{H_0} = \Gamma = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} &\text{ ergibt sich:} \\
\Rightarrow k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}&
\end{aligned}$$

b) Berechnung von H_0:

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{E} &= -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} \\
\text{rot}\,\vec{E} &= \frac{\partial\,E_x}{\partial z}\vec{e}_y = -jk_1 E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)}\vec{e}_y \\
-\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} &= -j\omega\mu H_0 e^{j(\omega t - k_1 z)}\vec{e}_y \\
\Rightarrow H_0 = \frac{k_1}{\omega\mu}E_0 &\qquad (20)
\end{aligned}$$

c) Die Phasendrehung wird nach Gleichung (20) durch die komplexe Wellenzahl verursacht. Es ist also die Phase von k_1 zu berechnen.

$$\angle k_1 = \arctan\frac{\text{Im}\{k_1\}}{\text{Re}\{k_1\}}$$

Da sich k_1 schwer zerlegen lässt, kann man nach den Rechenregeln für komplexe Zahlen auch die Phase von k_1^2 berechnen:

$$\angle k_1 = \frac{1}{2}\angle k_1^2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{-\omega\mu\kappa}{\omega^2\mu\varepsilon} = -\frac{1}{2}\arctan\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}$$

d) Das zu betrachtende E-Feld lautet:

$$\vec{E} = E_0 e^{j\omega t}e^{-j\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}z}e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}z}\vec{e}_x$$

Für die Bestimmung der Strahlungsleistungsdichte wird der Pointingvektor betrachtet und es gilt:

$$S \sim E^2$$

Daher muss gelten:

$$\frac{\left\|\vec{E}(z)\right\|^2}{\left\|E^2(z=0)\right\|^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}z} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}z} = e^{-\sqrt{2\omega\mu\kappa}z} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sqrt{2\omega\mu\kappa}z = \ln 2$$

$$\Rightarrow z = \frac{\ln 2}{\sqrt{2\omega\mu\kappa}}$$

e) Im ideal leitenden Medium gibt es kein E-Feld. Daher folgt aus den Stetigkeitsbedingungen:

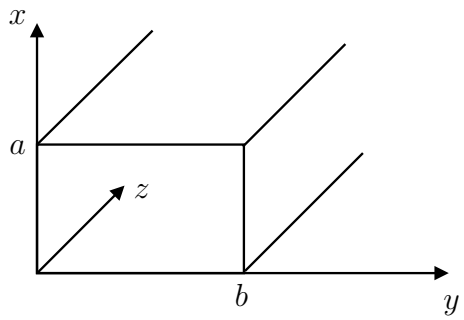
$$\vec{E}_r = -\vec{E}_e$$

Das Feld der reflektierten Welle lautet damit:

$$\vec{E}_r(z,t) = -E_o e^{j(\omega t + k_3 z)} \vec{e}_x$$

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Gegeben sei ein rechteckiger Hohlleiter mit den Kantenlängen a und b und unendlich gut leitendem Metall. Innerhalb des Hohlleiters breiten sich TE-Wellen in positiver z-Richtung aus (a<b).



a) Welche tangentiale Feldkomponente gehört zu einer TE-Welle:
$H_z = H_0 \cos(\frac{m\pi}{a} x) \cos(\frac{n\pi}{b} y) e^{j(\omega t - k_z z)}$ oder
$E_z = E_0 \sin(\frac{m\pi}{a} x) \sin(\frac{n\pi}{b} y) e^{j(\omega t - k_z z)}$?
Leiten Sie die Wellenzahl k_z aus der Wellengleichung her.

b) Leiten Sie den Audruck für die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz einer TE-Welle im abgebildeten Hohlleiter her und geben Sie den zugehörigen Mode an.
Verwenden Sie: $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

c) Warum existieren keine TM_{10}-Moden?

d) Bestimmen Sie die Gruppengeschwindigkeit $v_{g01} = \frac{\partial \omega}{\partial k_{z01}}$ einer Welle mit dem Mode TE_{01}.

e) Welche Bedingung muss für einen Ort konstanter Phase gelten? Leiten Sie den Ausdruck für die Phasengeschwindigkeit her.

f) Zeigen Sie, dass für die Phasengeschwindigkeit $v_{01} = \frac{\omega}{k_{z01}} > c_0$ gilt ($\epsilon = \epsilon_0$,$\mu = \mu_0$). Wieso kann die Energie dennoch nicht mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen werden?

Lösung 5 (16 Punkte)

a) Die Wellengleichung wird für die H_z-Komponente aufgestellt.

$$\Delta H_z - \epsilon\,\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0$$

Durch Einsetzen von H_z und Auflösen kann k_z allgemein bestimmt werden.

$$\begin{aligned} - \quad & \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_z^2 + \epsilon\,\mu\,w^2 = 0 \\ k_z \quad = \quad & \sqrt{\epsilon\,\mu\,\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

b) Für $k_z = 0$:

$$0 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\omega = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Die Frequenz ist für m= 0 und n= 1 am niedrigsten.

$$\omega = c\frac{\pi}{b}$$

Dies ist eine TE_{01}-Welle.

c) Für m= 0 oder n=0 gilt $E_z(x,y,z,t) = E_0 sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$. Somit kann unter diesen Bedingungen keine TM-Welle entstehen.

d)

$$v_{g01} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{\frac{\partial\omega}{\partial k}} = \frac{c_0^2 k}{\omega} = \frac{1}{\mu\epsilon\omega}\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

e) Für einenn Ort konstanter Phase gilt:

$$\omega t - kz = const$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial(\omega t - kz)}{\partial t} = 0 = \omega - \frac{k\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_{phase} = \frac{\omega}{k}$$

f) Für die Phasengeschwindigkeit gilt:

$$v_{01} = \frac{\omega}{k_{z01}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\omega^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} > c_0$$

Dementsprechend lautet die Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{g01} = \frac{c_0^2}{v_{01}} < c_0$$