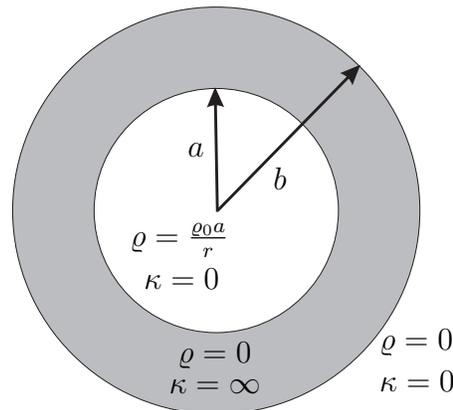


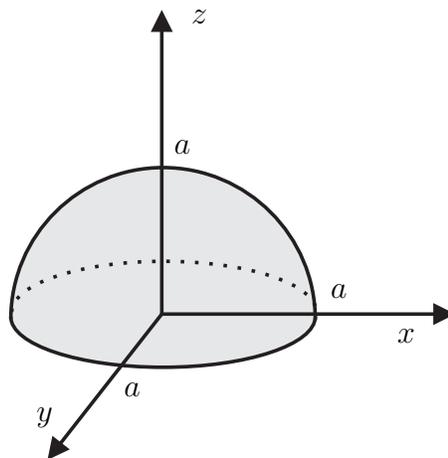
Aufgabe 1 (16 Punkte)

Eine nichtleitende Kugel des Radius a mit der Raumladungsdichte $\rho = \frac{\rho_0 a}{r}$ ist im Ursprung zentriert und wird von einer Kugelschale aus unendlich gut leitendem Metall mit Radius b und der Raumladungsdichte $\rho = 0$ im Bereich $a \leq r \leq b$ umschlossen, siehe Abbildung. Außerhalb des Materials befindet sich ein nichtleitendes Material mit $\rho = 0$. ϵ ist im ganzen Raum konstant.



- Berechnen Sie das elektrische Feld \vec{E} im ganzen Raum und skizzieren Sie den Betrag $|\vec{E}|$ in Abhängigkeit des Radius r .
- Berechnen Sie die Flächenladungsdichten auf den Metallflächen bei $r = a$ und $r = b$.
- Berechnen und skizzieren Sie das elektrostatische Potential Φ im ganzen Raum, mit $\Phi(\infty) = 0$.

Im Folgenden wird die Anordnung geändert. Die Metall-Kugelschale wird entfernt, und von der Kugel mit Radius a wird die untere Hälfte entfernt, siehe Abbildung. Außerdem ist die Raumladungsdichte der Halbkugel nun konstant $\rho = \rho_0$.



- Bestimmen Sie das elektrische Feld im Ursprung $\vec{E}(\vec{r} = \vec{0})!$

Hinweis 1: Der Aufgabenteil d) ist von den Aufgabenteilen a) bis c) unabhängig.

Hinweis 2: Das Coulomb-Integral für das elektrische Feld lautet: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'$.

Hinweis 3: $\int_{x_1}^{x_2} \cos x \sin x dx = [-\frac{1}{2} \cos^2 x]_{x_1}^{x_2}$

- a) Aufgrund der kugelsymmetrischen Anordnung ergibt sich für das elektrische Feld nur ein radiale Komponente $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\vec{e}_r$. Ansatz mit Hilfe des Satzes vom Hüllenfluß und den gegebenen Materialeigenschaften:

$$\iiint \varepsilon \vec{E} d\vec{f} = \iiint \varrho dv \quad (1)$$

Die linke Seite der Gleichung bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} \iiint \varepsilon \vec{E} d\vec{f} &= \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E_r(r) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi \\ &= 2\pi \varepsilon r^2 E_r(r) \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 2\pi \varepsilon r^2 E_r(r) [-\cos \vartheta]_0^{\pi} \\ &= 4\pi \varepsilon r^2 E_r(r) \end{aligned}$$

Für den Bereich $0 \leq r < a$ ergibt sich für die radiale Komponente

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varrho(r') r'^2 \sin \vartheta dr' d\vartheta d\phi \\ &= \frac{1}{\varepsilon r^2} \int_0^r \frac{\varrho_0 a}{r'} r'^2 dr' \\ &= \frac{\varrho_0 a}{\varepsilon r^2} \frac{1}{2} [r'^2]_0^r \\ &= \frac{\varrho_0 a}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

Im Bereich $a \leq r < b$ ergibt sich aufgrund der unendlichen Leitfähigkeit des Materials kein elektrisches Feld: $E_r(r) = 0$.

Im Bereich $b \leq r$ berechnet sich das elektrische Feld zu

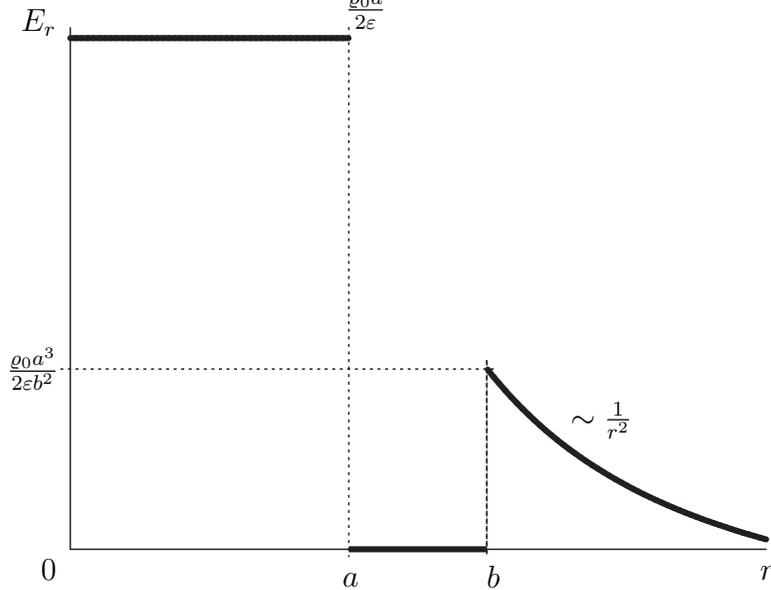
$$E_r(r) = \frac{1}{\varepsilon r^2} \int_0^a \frac{\varrho_0 a}{r'} r'^2 dr' = \frac{\varrho_0 a^3}{2\varepsilon r^2}$$

- b) Für Grenzflächen gilt $\sigma = D_{n_2} - D_{n_1}$. In diesem Fall führt dies zu

$$\sigma(r = a) = 0 - \varepsilon E_r(r = a) = -\frac{\varrho_0 a}{2}$$

und

$$\sigma(r = b) = \varepsilon E_r(r = b) - 0 = \frac{\varrho_0 a^3}{2b^2}$$



- c) Mit Hilfe von $\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{s}$ ergeben sich für die Bereiche folgende Lösungen. Für $b \leq r < \infty$ ergibt sich

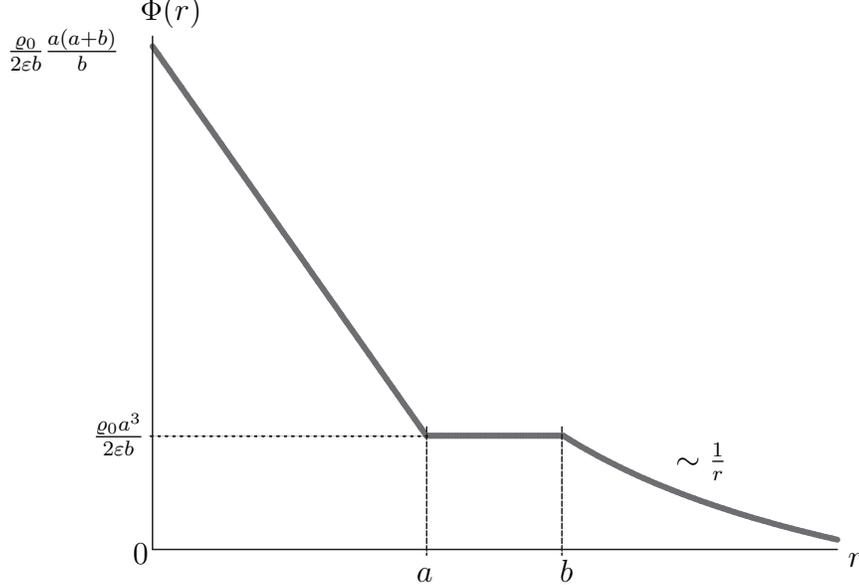
$$\begin{aligned}
 \Phi(r) &= \Phi(\infty) + \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{s} \\
 &= \int_r^{\infty} \frac{\rho_0 a^3}{2\epsilon r'^2} dr' \\
 &= \frac{\rho_0 a^3}{2\epsilon} \left[-\frac{1}{r'} \right]_r^{\infty} \\
 &= \frac{\rho_0 a^3}{2\epsilon r}
 \end{aligned}$$

Im Bereich $a \leq r < b$ gibt es kein elektrisches Feld, so dass das Potential konstant bleibt:

$$\Phi(r = b) = \Phi(r = a) = \frac{\rho_0 a^3}{2\epsilon b} \quad (2)$$

Im Bereich $0 \leq r < a$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \Phi(r) &= \Phi(a) + \int_r^a \frac{\rho_0 a}{2\epsilon} dr' \\
 &= \frac{\rho_0 a^3}{2\epsilon b} + \left[\frac{\rho_0 a}{2\epsilon} r' \right]_r^a \\
 &= \frac{\rho_0 a^3}{2\epsilon b} + \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon} - \frac{\rho_0 a r}{2\epsilon} = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon} \left(\frac{a^2}{b} + a - r \right)
 \end{aligned}$$



- d) Das Coulomb-Integral ist laut Aufgabenstellung $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'$. Da das elektrische Feld im Ursprung $\vec{r} = \vec{0}$ betrachtet wird ergibt sich für $(\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{r}' = -r\vec{e}_{r'}$. Der Term im Nenner des Integrals wird dadurch zu $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = r'^3$. Damit lässt sich das Integral lösen

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv' \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{-r'\vec{e}_{r'}}{r'^3} r'^2 \sin\vartheta dr' d\vartheta d\phi \end{aligned}$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}_{r'}$ wird in kartesischen Koordinaten ausgedrückt um die Abhängigkeit von ϑ und ϕ nicht zu verstecken:

$$\vec{e}_{r'} = \vec{e}_x \sin\vartheta \cos\phi + \vec{e}_y \sin\vartheta \sin\phi + \vec{e}_z \cos\vartheta \quad (3)$$

Das Feld hat aufgrund von Symmetrieeigenschaften nur eine \vec{e}_z Komponente:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a -\cos\vartheta \sin\vartheta dr' d\vartheta d\phi \vec{e}_z \\ &= \frac{2\pi a \rho_0}{4\pi\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \vec{e}_z \\ &= \frac{a\rho_0}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} \cos^2\vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{e}_z \\ &= -\frac{a\rho_0}{4\epsilon} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Abbildung 1 zeigt eine dreidimensionale Anordnung. Oberhalb der x-y Ebene auf der Höhe $z = z_0$ befindet sich eine Punktladung Q_1 . Die x-y Ebene wird von einer unendlich ausgedehnten Leiterplatte ausgefüllt. Die Leiterplatte ist geerdet.

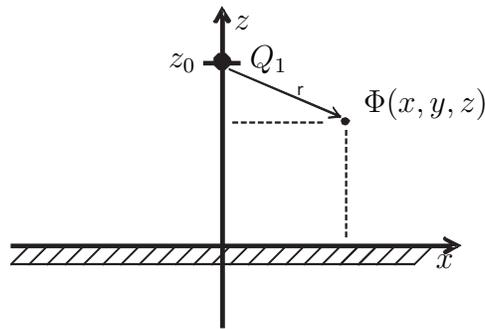


Abbildung 1: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile (a) bis (f)

- a) Das Potential $\Phi(x, y, z)$ im gesamten Raum oberhalb der x-y Ebene ($z > 0$) soll mit Hilfe des Spiegelungsprinzips berechnet werden. Zeichnen Sie zunächst eine Skizze der Anordnung in der die erzeugte imaginäre Ladung Q_2 enthalten ist und geben Sie deren Koordinate an. Welchen Wert besitzt die imaginäre Ladung Q_2 ?

Hinweis: Überlegen Sie sich welche Bedingung für das elektrische Feld auf der Metalloberfläche gelten muss und wie diese durch eine geeignete imaginäre Ladung erzeugt werden kann.

- b) Bestimmen Sie nun das Potential $\Phi(x, y, z)$ im gesamten Raum oberhalb der x-y Ebene ($z > 0$) mit Hilfe des Spiegelungsprinzips. Rechnen Sie in kartesischen Koordinaten.
- c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ aus dem zuvor berechneten Potential.
- d) Geben Sie das elektrische Feld auf der Metalloberfläche ($z = 0$) an. In welche Richtung zeigt das Feld bei $z = 0$?
- e) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte $\sigma(x, y)$.
- f) Wie kann die influenzierte Gesamtladung auf der Leiteroberfläche berechnet werden? (nur Antwort und Ansatz, keine Rechnung)

In den Aufgabenteilen (g) bis (h) wird die Anordnung folgendermaßen verändert (siehe Abbildung 2). In der Ebene $x = -a$ ist nun eine zusätzliche unendlich ausgedehnte Leiterplatte angebracht.

- g) Wieviele imaginäre Ladungen werden benötigt um das Potential $\Phi(x, y, z)$ für $z > 0, x > 0$ mit dem Spiegelungsprinzip zu berechnen? Welche Werte besitzen die imaginären Ladungen $Q_{2..n}$? Zeichnen Sie eine Skizze der Anordnung in der die erzeugten imaginären Ladungen $Q_{2..n}$ enthalten sind und geben Sie deren Koordinaten an.
- h) Berechnen Sie das Potential $\Phi(x, y, z)$ für $z > 0, x > 0$.

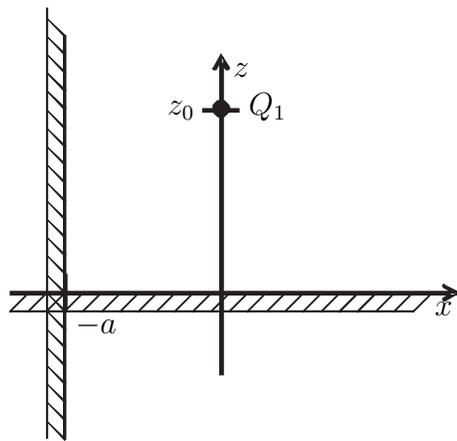


Abbildung 2: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile (g) bis (h)

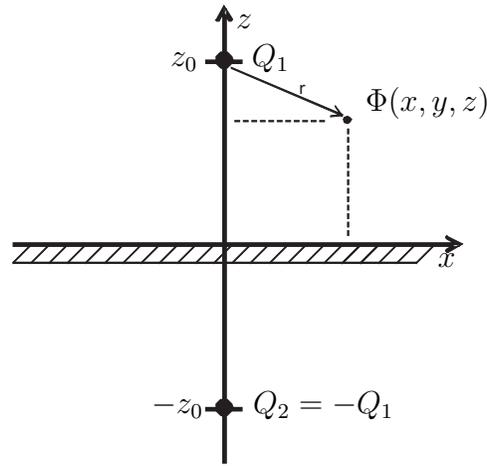


Abbildung 3: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile (a) und (f)

- a) Die imaginäre Ladung $Q_2 = -Q_1$ befindet sich bei $(x = 0, y = 0, z = -z_0)$
 b) Das Potential

$$\Phi_{ges}(x, y, z) = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_1}{r_2} \right)$$

ergibt sich mit

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}$$

zu

$$\Phi_{ges}(x, y, z) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right)$$

- c) Mit $\vec{E} = -grad(\Phi)$ berechnet sich das elektrische Feld zu

$$\vec{E} = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\left(\frac{-x}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{e}_x \right.$$

$$+ \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{e}_y$$

$$+ \left(\frac{-(z - z_0)}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z + z_0}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{e}_z \Bigg)$$

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z - z_0)\vec{e}_z}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z + z_0)\vec{e}_z}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

d) Das Feld besitzt nur eine \vec{e}_z -Komponente

$$\vec{E} = -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{e}_z$$

e) Die Flächenladungsdichte berechnet sich mit $\sigma(x, y) = \epsilon \vec{E}(z = 0) \vec{e}_z - 0 \vec{e}_z$

$$\sigma(x, y) = -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

f) Die Influenzladung kann mit dem Gausschen Integralsatz über die eingeschlossene Flächenladungsdichte berechnet werden

$$Q_{inf} = \int_F \sigma df = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, y) dx dy = -Q_1$$

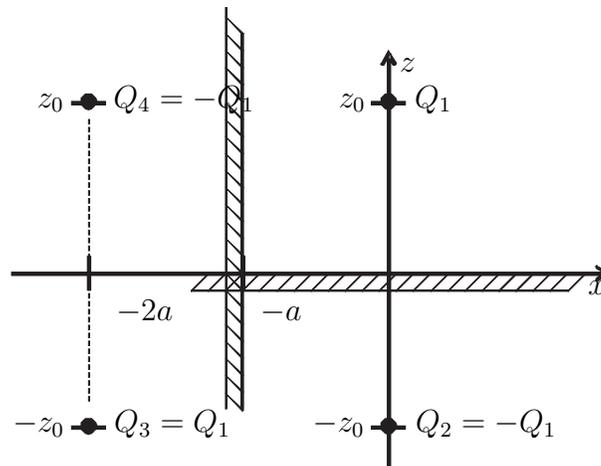


Abbildung 4: Versuchsanordnung für die Aufgabenteile (g) bis (h)

g) Durch Spiegelung der Hilfsanordnung aus Abbildung 3 bei $x = -a$ ergibt sich:

$Q_2 = -Q_1$ bei $(x = 0, y = 0, z = -z_0)$, $Q_3 = Q_1$ bei $(x = -2a, y = 0, z = -z_0)$, $Q_4 = -Q_1$ bei $(x = -2a, y = 0, z = z_0)$

h) Das Potential

$$\Phi_{ges}(x, y, z) = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_1}{r_2} + \frac{Q_1}{r_3} - \frac{Q_1}{r_4} \right)$$

ergibt sich mit

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2} \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2} \\ r_3 &= \sqrt{(x + 2a)^2 + y^2 + (z + z_0)^2} \\ r_4 &= \sqrt{(x + 2a)^2 + y^2 + (z - z_0)^2} \end{aligned}$$

zu

$$\Phi_{ges}(x, y, z) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x + 2a)^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + 2a)^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} \right)$$

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Gegeben sei eine in der x - y -Ebene liegende dünne Leiterschleife mit dem Radius a , siehe Abbildung 5. Die dargestellte Leiterschleife dreht sich in einem konstanten, homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die x -Achse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ steht die Leiterschleife orthogonal zum Magnetfeld $B_0 \vec{e}_z$.

a) Berechnen Sie die in die Leiterschleife induzierte Spannung U_{ind} in Abhängigkeit der Zeit t .

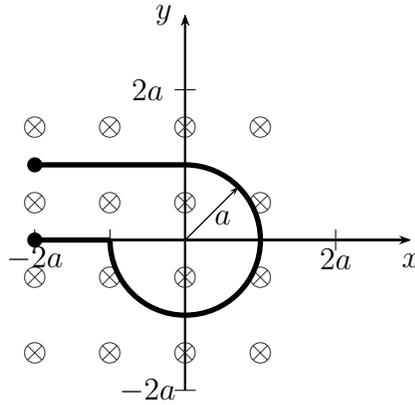


Abbildung 5: Leiterschleife 1

Im Folgenden sei ein unendlich langer Linienleiter in Form einer Leiterschleife gegeben, siehe Abbildung 6. Dabei liegt der Leiter fest in der x - y -Ebene und wird von einem Gleichstrom I durchflossen.

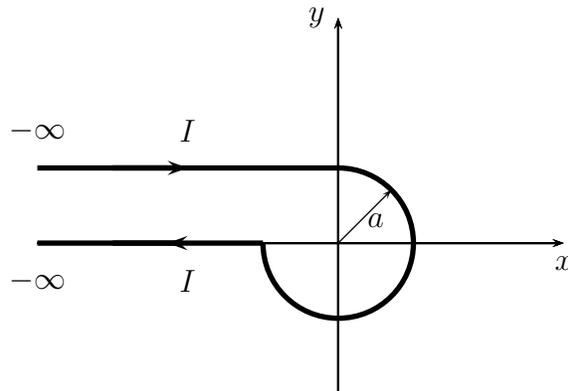


Abbildung 6: Leiterschleife 2

b) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im Ursprung des Koordinatensystems unter Verwendung des Gesetzes von Biot-Savart für Linienleiter. Zerlegen Sie hierbei das zu lösende Integral in geeignete Abschnitte und nutzen Sie die unten angegebenen Hinweise.

Hinweise:

- Im Aufgabenteil (b) wirkt kein äußeres Magnetfeld.

- $$\int \frac{1}{(x^2 + c)^{3/2}} dx = \frac{x}{c\sqrt{x^2 + c}}$$

- a) Die Leiterschleife dreht sich in einem homogenen Magnetfeld mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Daher ändert sich die Fläche der Leiterschleife, die vom Magnetfeld durchflutet wird in Abhängigkeit der Zeit t :

$$A(t) = \cos(\omega t)A$$

Um die induzierte Spannung U_{ind} berechnen zu können, muss zu Beginn der magnetische Fluss berechnet werden:

$$\Phi_m = \iint_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\Phi_m = B_0 \cdot A(t)$$

$$\Phi_m = B_0 \cdot \cos(\omega t) \left(2a^2 + \frac{3}{4}a^2\pi \right)$$

Die Induktionsspannung U_{ind} ergibt sich nun aus dem Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$U_{\text{ind}} = B_0 \cdot \omega \sin(\omega t) a^2 \left(2 + \frac{3}{4}\pi \right)$$

- b) Das Gesetz von Biot-Savart für dünne Leiter lautet:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_S \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Da die magnetische Flussdichte im Koordinatenursprung berechnet werden muss, gilt:

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_S \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r}')}{|\vec{r}'|^3}$$

Das Wegintegral ist in drei Abschnitte zu zerlegen:

$$\vec{B} = \int_{S_1} d\vec{B}_1 + \int_{S_2} d\vec{B}_2 + \int_{S_3} d\vec{B}_3$$

Berechnung von \vec{B}_1 :

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ a \\ 0 \end{pmatrix}}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \, dx \end{pmatrix}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{\mu I}{4\pi} \vec{e}_z \left[\frac{x}{a\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{x \rightarrow -\infty}^0 = -\frac{\mu I}{4\pi a} \vec{e}_z$$

Berechnung von \vec{B}_2 :

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi} \frac{\vec{e}_\varphi \cdot a \, d\varphi \times a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}{a^3} \quad \left| \quad \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y \right.$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi} \frac{a \, d\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}{a^3}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 \, d\varphi \end{pmatrix}}{a^3} = -\frac{3\mu I}{8a} \vec{e}_z$$

Berechnung von \vec{B}_3 :

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{-a}^{-\infty} \frac{\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(x^2)^{3/2}} = \vec{0}$$

Damit ergibt sich die gesamte magnetische Flussdichte \vec{B} :

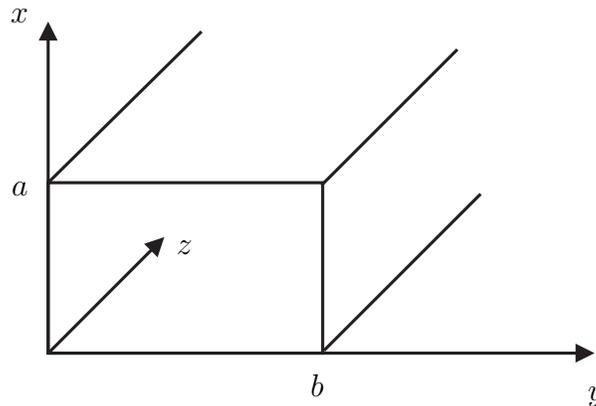
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = - \left(\frac{\mu I}{4\pi a} + \frac{3\mu I}{8a} \right) \vec{e}_z$$

Der Zusammenhang zwischen der magnetische Flussdichte \vec{B} und der magnetischen Feldstärke \vec{H} lautet:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = - \left(\frac{I}{4\pi a} + \frac{3I}{8a} \right) \vec{e}_z$$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

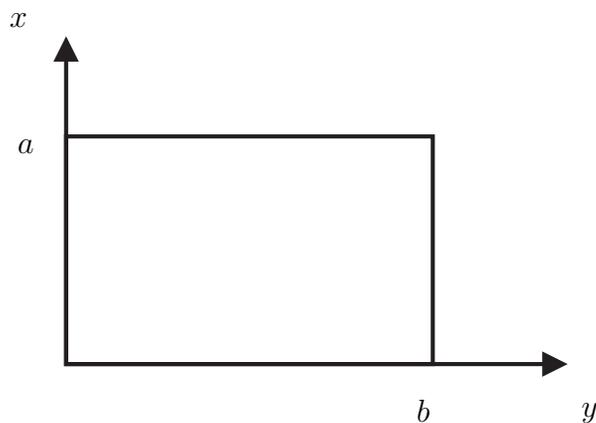
Gegeben sei ein rechteckiger Hohlleiter aus unendlich gut leitendem Metall mit den Kantenlängen a und b . Im Inneren des Hohlleiters befinde sich eine TM_{mn} Welle mit den gegebenen Feldkomponenten und den Wellenzahlen $k_x(m)$ und $k_y(n)$.



$$H_x(x, y, z, t) = \frac{j\omega \epsilon k_y}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_y(x, y, z, t) = \frac{-j\omega \epsilon k_x}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

- Welche Randbedingungen müssen $E_x(x, y, z, t)$, $E_y(x, y, z, t)$ und $E_z(x, y, z, t)$ an den Hohlleiterwänden erfüllen?
- Welche Eigenschaften des E- und des H-Feldes werden zum Skizzieren des Feldlinienbildes einer $TM_{1,1}$ - Welle im Hohlleiter benötigt? Skizzieren Sie das Feldlinienbild (E- und H-Feld) in die vorbereitete Abbildung des Hohlleiters. Begründen Sie Ihre Skizze!



- Es gelte: $E_z = E_z^0(x, y)e^{j(\omega t - k_z z)}$. Welche der Funktionen

$$E_z^0(x, y) = C \sin k_x x \sin k_y y, \quad E_z^0(x, y) = D \cos k_x x \cos k_y y$$

genügen den Randbedingungen? Bestimmen Sie k_x und k_y .

- d) Leiten Sie allgemein die Wellenzahl k_z her. Verwenden Sie hierzu die Wellengleichung für H_x oder H_y .
- e) Leiten Sie die Grenzfrequenzen $f_{c_{mn}}$ der Moden TM_{mn} in Abhängigkeit von m und n aus der Wellenzahl her.

Es gilt: $b = 2a$

- f) Geben Sie die obere und die untere Grenze der Kantenlängen a und b abhängig von der Frequenz an, sodass sich nur der kleinste TM - Mode ausbreitet. Hinweis:

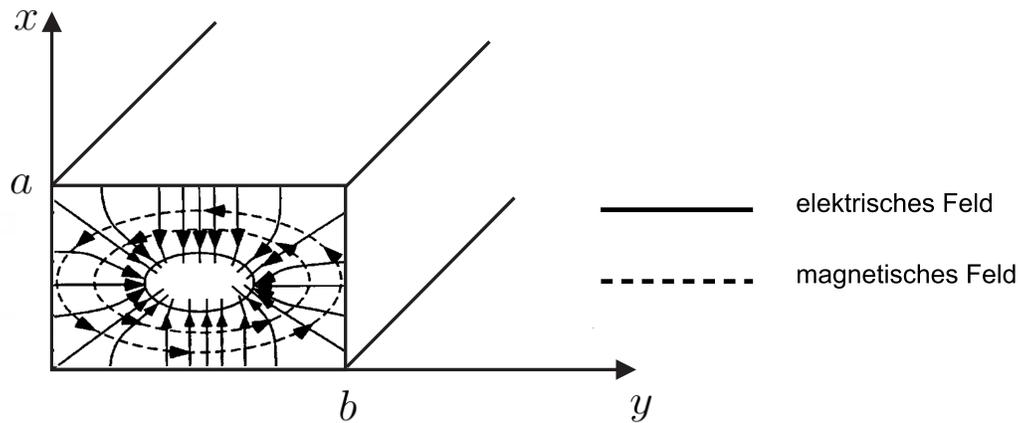
$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

a) An einer ideal leitenden Fläche können keine tangentialen elektrischen Felder existieren.

$$\begin{aligned} E_z(x, 0, z, t) &= 0 & E_x(x, 0, z, t) &= 0 \\ E_z(x, b, z, t) &= 0 & E_x(x, b, z, t) &= 0 \\ E_z(0, y, z, t) &= 0 & E_y(0, y, z, t) &= 0 \\ E_z(a, y, z, t) &= 0 & E_y(a, y, z, t) &= 0 \end{aligned}$$

b) Folgende Bedingungen fließen in die Skizze ein:

- $H_z = 0$
- E-Feldlinien stehen senkrecht auf der Leiterebene.
- Tangentiale E-Feldkomponenten verschwinden im idealen Leiter.
- E- und H-Feldkomponenten stehen senkrecht aufeinander.



c) Mit den Randbedingungen aus a):

$$\begin{aligned} E_z^0(0, y) &= C \sin k_x 0 \sin k_y y = 0 = D \cos(k_y y) \forall y \Rightarrow D = 0 \\ E_z^0(a, y) &= C \sin k_x a \sin k_y y = 0 \\ &\Rightarrow \sin k_x a = 0 \\ &\Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ E_z^0(x, 0) &= C \sin k_x x \sin k_y 0 = 0 \\ E_z^0(x, b) &= C \sin k_x x \sin k_y b = 0 \\ &\Rightarrow \sin k_y b = 0 \\ &\Rightarrow k_y = \frac{m\pi}{b} \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

d) Wellengleichung für H_x ist

$$\Delta H_x - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0.$$

Einsetzen von H_x aus der Aufgabenstellung ergibt:

$$\begin{aligned} -k_x^2 H_x - k_y^2 H_x - k_z^2 H_x + \omega^2 \mu \varepsilon H_x &= 0 \\ -k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \omega^2 \mu \varepsilon &= 0 \\ k_z &= \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2} \end{aligned}$$

e) An der Frequenz $f = f_{c_{mn}}$ ist die Wellenzahl $k_z = 0$. Nach Einsetzen der Wellenzahlen $k_x = \frac{m\pi}{a}$ und $k_y = \frac{n\pi}{b}$, die sich aus den Randbedingungen ergeben, und durch Auflösen der Gleichung nach f können die Cut-off Frequenzen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} 0 &= k_z = \sqrt{\omega_{c_{mn}}^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2} \\ \omega_{c_{mn}}^2 \mu \varepsilon &= k_x^2 + k_y^2 \\ f_{c_{mn}} &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \\ f_{c_{mn}} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

f) Damit sich die Welle TM_{mn} ausbreiten kann, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$f > f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Für den kleinsten Mode (TM_{11}) und der Bedingung $b = 2a$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f &> f_{c_{11}} \\ f &> \frac{1}{2\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2} \\ a &> \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\mu \varepsilon} f} \end{aligned}$$

$$b = 2a > \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\mu \varepsilon} f}.$$

Der nächsthöhere TM-Mode ist der Mode TM_{12} oder TM_{21} . Da die Kante b länger ist, besitzt der Mode TM_{12} die tiefere Grenzfrequenz.

$$f < f_{c_{12}}$$
$$f < \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \frac{1}{a}$$
$$a < \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\mu\varepsilon}f}$$

$$b = 2a < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu\varepsilon}f}$$

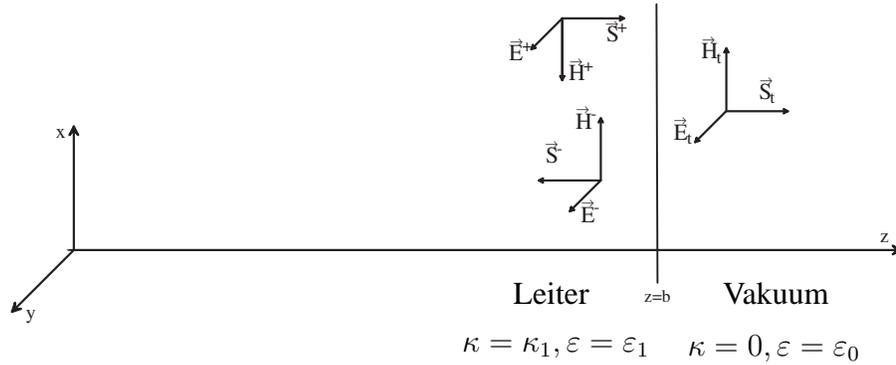
Aufgabe 5 (16 Punkte)

Eine ebene Welle breitet sich in einem Leiter mit $\kappa = \kappa_1, 0 < \kappa_1 < \infty$ in positive z -Richtung aus und trifft bei $z = b$ auf eine Grenzschicht zu Vakuum. Es gelte überall $\mu = \mu_0$. Im Leiter sind $\varepsilon = \varepsilon_1$ und $k = k_1$ komplex.

$$\text{Hinlaufende Welle: } \vec{E}^+ = E^+ e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_y \quad \vec{H}^+ = H^+ e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_x \quad (4)$$

$$\text{Reflektierte Welle: } \vec{E}^- = E^- e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{e}_y \quad \vec{H}^- = H^- e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{e}_x \quad (5)$$

$$\text{Durchgelassene Welle: } \vec{E}_t = E_t e^{j(\omega t - k_0(z-b))} \vec{e}_y \quad \vec{H}_t = H_t e^{j(\omega t - k_0(z-b))} \vec{e}_x \quad (6)$$



a) Leiten Sie mittels der Maxwell-Gleichung $\text{rot } \vec{H} = \dot{\vec{D}}$ (da $\vec{J} = 0$) und den Gleichungen (4) den folgenden Zusammenhang her: $E = -\Gamma H, \Gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

b) Geben Sie die Grenzbedingungen am Grenzübergang bei $z = b$ für die Felder an!

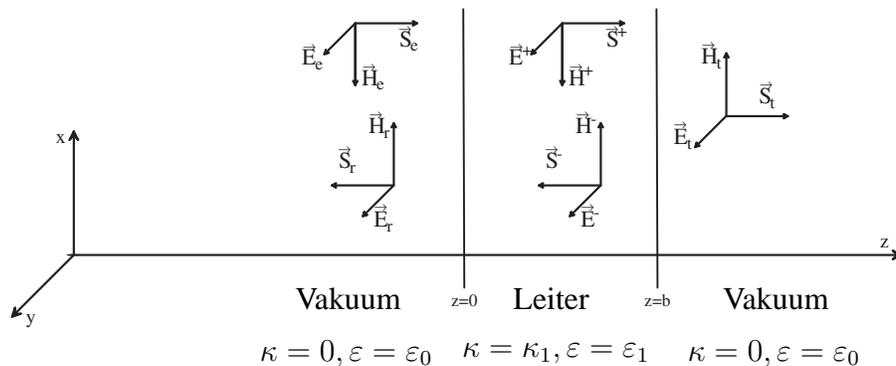
c) Berechnen Sie die Amplituden E_t und E^- als Funktion der Amplitude E^+ !

Hinweis: Nutzen Sie $E^+ = -\Gamma_1 H^+, E^- = \Gamma_1 H^-, E_t = -\Gamma_0 H_t$.

Nun wird folgende Anordnung betrachtet: Eine Welle mit dem E-Feld E_e soll vom Raumbereich $z > b$ abgeschirmt werden. Dazu wird eine leitende Trennschicht zwischen $0 < z < b$ genutzt. Neben den in den vorigen Aufgabeteilen betrachteten Wellen treten die beiden folgenden Wellen auf:

$$\text{Hinlaufende Welle im Vakuum: } \vec{E}_e = E_e e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y \quad \vec{H}_e = H_e e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x \quad (7)$$

$$\text{Reflektierte Welle im Vakuum: } \vec{E}_r = E_r e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_y \quad \vec{H}_r = H_r e^{j(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_x \quad (8)$$



d) Geben Sie die Grenzflächenbedingungen für die Felder an der Grenzschicht bei $z = 0$ an!

e) Eliminieren Sie E_r und H_r aus den Grenzflächenbedingungen für $z = 0$! Berechnen Sie E_e als Funktion nur von E^+ und geben Sie die sog. Schirmdämpfung E_t/E_e an!

Hinweis 1: Falls Sie Aufgabe c) nicht gelöst haben, nutzen Sie $E_t = A_+^t E^+$ und $E^- = A_+^- E^+$!

Hinweis 2: Nutzen Sie $E_e = -\Gamma_0 H_e$, $E_r = \Gamma_0 H_r$.

a)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \dot{\vec{D}} \quad (1)$$

$$\vec{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} = \vec{e}_y \varepsilon E(j\omega) e^{j(\omega t - kz)} \quad (2)$$

$$H e^{j(\omega t - kz)} (-jk) = \varepsilon E(j\omega) e^{j(\omega t - kz)} \quad (3)$$

$$E = \frac{-k}{\varepsilon \omega} H = \frac{-\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{\varepsilon \omega} H = - \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{\Gamma} H \quad (4)$$

b) Die Tangentialkomponenten der Summe aller E- und H-Felder jeweils links und rechts der Grenzfläche müssen identisch sein:

$$E^+ e^{j(\omega t - k_1 b)} + E^- e^{j(\omega t + k_1 b)} = E_t e^{j\omega t} \quad (5)$$

$$H^+ e^{j(\omega t - k_1 b)} + H^- e^{j(\omega t + k_1 b)} = H_t e^{j\omega t} \quad (6)$$

bzw. nach Division durch $e^{j\omega t}$:

$$E^+ e^{-jk_1 b} + E^- e^{jk_1 b} = E_t \quad (7)$$

$$H^+ e^{-jk_1 b} + H^- e^{jk_1 b} = H_t \quad (8)$$

c) Mit den Hinweisen gilt:

$$E^+ e^{-jk_1 b} + E^- e^{jk_1 b} = E_t \quad (9)$$

$$\frac{E^+}{-\Gamma_1} e^{-jk_1 b} + \frac{E^-}{\Gamma_1} e^{jk_1 b} = \frac{E_t}{-\Gamma_0} \quad (10)$$

Elimination von E_t :

$$E^+ e^{-jk_1 b} \left(1 - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}\right) + E^- e^{jk_1 b} \left(1 + \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}\right) = 0 \quad | \cdot \Gamma_1 \quad (11)$$

$$E^+ e^{-jk_1 b} (\Gamma_1 - \Gamma_0) + E^- e^{jk_1 b} (\Gamma_1 + \Gamma_0) = 0 \quad (12)$$

$$(13)$$

Aufgelöst nach E^- :

$$E^- = E^+ e^{-2jk_1 b} \frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \quad (14)$$

und daraus Bestimmung von E_t :

$$E_t = E^+ e^{-jk_1 b} \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \quad (15)$$

d) Auch hier gilt: Die Tangentialkomponenten der Summe aller E- und H-Felder jeweils links und rechts der Grenzfläche müssen identisch sein:

$$E_e + E_r = E^+ + E^- \quad (16)$$

$$H_e + H_r = H^+ + H^- \quad (17)$$

d) Mit Hinweis 2 gilt:

$$E_e + E_r = E^+ + E^- \quad (18)$$

$$\frac{E_e}{-\Gamma_0} + \frac{E_r}{\Gamma_0} = \frac{E^+}{-\Gamma_1} + \frac{E^-}{\Gamma_1} \quad (19)$$

Multiplikation von (19) mit Γ_0 und Subtraktion von (18) eliminiert E_r :

$$2E_e = E^+ \left(1 + \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}\right) + E^- \left(1 - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}\right) \quad (20)$$

$$E_e = E^+ \left(\frac{\Gamma_0 + \Gamma_1}{2\Gamma_1}\right) + E^- \left(\frac{\Gamma_1 - \Gamma_0}{2\Gamma_1}\right) \quad (21)$$

$$= E^+ \left(\frac{\Gamma_0 + \Gamma_1}{2\Gamma_1} + e^{-2jk_1b} \frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_0}{2\Gamma_1}\right) \quad (22)$$

Mit E_t aus Aufgabenteil c) ist die gesuchte Schirmdämpfung E_t/E_e :

$$E_t/E_e = \frac{e^{-jk_1b} \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 + \Gamma_1}}{\left(\frac{\Gamma_0 + \Gamma_1}{2\Gamma_1} + e^{-2jk_1b} \frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{\Gamma_0 + \Gamma_1} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_0}{2\Gamma_1}\right)} \quad (23)$$

Mit $\alpha = \frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{\Gamma_0 + \Gamma_1}$ lässt sich der Ausdruck vereinfachen zu

$$E_t/E_e = \frac{(1 - \alpha^2)e^{-jk_1b}}{1 - \alpha^2 e^{-2jk_1b}} \quad (24)$$